THESE

présentée à

L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE III
Centre de Saint Jérôme

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

Daniel MAYSTRE

"SUR LA DIFFRACTION ET L'ABSORPTION PAR LES RESEAUX UTILISES DANS L'INFRAROUGE, LE VISIBLE ET L'ULTRAVIOLET ; APPLICATIONS A LA SPECTROSCOPIE ET AU FILTRAGE DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES".

Soutenue le 25 Février 1974 devant la Commission d'Examen

MM. P. BOUSQUET — *Président*

A. LICHNEROWICZ
A. MARECHAL
R. PETIT
G. PIEUCHARD
} *Examinateurs*

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547005_0007

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE III
Centre de Saint Jérôme

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

Daniel MAYSTRE

"SUR LA DIFFRACTION ET L'ABSORPTION PAR LES RESEAUX UTILISES DANS L'INFRAROUGE, LE VISIBLE ET L'ULTRAVIOLET ; APPLICATIONS A LA SPECTROSCOPIE ET AU FILTRAGE DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES".

Soutenue le 25 Février 1974 devant la Commission d'Examen

MM. P.	BOUSQUET	*Président*
A.	LICHNEROWICZ	*Examinateurs*
A.	MARECHAL	
R.	PETIT	
G.	PIEUCHARD	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION p. 1

Chapitre I :

Propriétés Générales des Réseaux p. 4

I. 1. Définitions et notations p. 5

I. 2. Mise en équation p. 7

I. 3. Validité du développement de Rayleigh p. 11

I. 4. Le théorème de réciprocité p. 17

I. 5. Propriétés spécifiques du réseau infiniment conducteur. p. 22

I. 5. 1. Tout problème de diffraction par un réseau infiniment conducteur peut être associé à un problème de diffraction "classique" p. 23

I. 5. 2. La loi de conservation d'énergie p. 29

I. 5. 3. Interférences à 4 ondes planes, applications aux réseaux échelettes. p. 30

I. 5. 4. Diffraction par un réseau lamellaire infiniment conducteur. p. 33

Chapitre II :

Le Formalisme Intégral de la Diffraction par un Réseau p. 40

II. 1. Théories intégrales du réseau infiniment conducteur p. 40

II. 1. 1. Le premier cas fondamental : E // p. 41

II. 1. 2. Le second cas fondamental : H // p. 47

II. 2. Théorie intégrale du réseau de conductivité finie employé dans des conditions "classiques" p. 49

II. 2. 1. Mise en équation p. 50

II. 2. 2. Importance capitale du choix d'une fonction inconnue. p. 51

II. 2. 3. Définition mathématique de la fonction inconnue. p. 52

II. 2. 4. Expression en fonction de ϕ_1 du champ et de sa dérivée normale sur $\mathcal{T}$ p. 53

II. 2. 5. Relation entre champ et dérivée normale sur $\mathcal{T}$ imposée par la présence du matériau remplissant $\mathcal{M}$ p. 54

II. 2. 6. Equation intégrale p. 56

II. 2. 7. Equation intégrale du cas H // p. 57

II. 2. 8. Forme équivalente des fonctions à deux variables. p. 57

II. 2. 9. Limite des équations quand la conductivité tend vers l'infini. p. 58

II. 3. Théorie intégrale du réseau de conductivité finie employé en "diffraction conique". p. 59

II. 4. Problème des arêtes dans les équations intégrales p. 60

Chapitre III.

Résolution Numérique des équations Intégrales p. 72

III. 1. Choix du nombre et de la position des points de discrétisation. p. 74

III. 2. Choix de la méthode d'intégration p. 76

III. 3. Définition de $\mathcal{G}_{f_1}$ et $\mathcal{N}'_1$ p. 78

III. 4. Etude de $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}'_0$ p. 79

III. 4. 1. Sommation p. 79

III. 4. 2. Limites quand M' M p. 80

III. 4. 3. Intégration p. 81

III. 5. Etude de $\mathcal{G}_{f_0}$ p. 82

III. 6. Etude de $\mathcal{C}$ p. 84

III. 6. 1. Sommation p. 85

III. 6. 2. Comportement quand M' M , intégration p. 85

III. 7. Etude de $\mathcal{G}_{f_1}$ et $\mathcal{N}'_1$ p. 88

III. 8. Vérifications numériques des programmes p. 91

III. 9. Tableau des programmes p. 93

Chapitre IV :

Confrontation avec l'expérience p. 96

Chapitre V :

Résultats numériques, applications pratiques à la spectroscopie et au filtrage des longueurs d'onde p. 108

V. 1. Etude du réseau échelette de conductivité infinie dans un montage à déviation constante. p. 108

V. 2. Etude du réseau de profil quelconque et de conductivité infinie employé dans un montage à déviation constante. p. 109

V. 3. Intérêt de la diffraction conique pour les réseaux infiniment conducteurs. p. 111

V. 4. Utilisation des propriétés des réseaux au filtrage des longueurs d'onde. p. 114

V. 5. Etude des réseaux lamellaires et créneaux infiniment conducteurs. p. 116

V. 6. Etude des réseaux employés en diffraction classique dans l'ultra-violet. p. 117

V. 6. 1. Un exemple d'étude ponctuelle dans l'ultra-violet. p. 118

V. 6. 2. Etude des réseaux dans le proche ultra-violet p. 123

V. 6. 3 Etude des réseaux recouverts d'or dans l'ultra-violet en dessous de 1000 Å. p. 124

V. 7. Intérêt de la diffraction conique en ultra-violet p. 130

CONCLUSION p. 134

Annexe A 1 p. 136

Annexe A 2 p. 145

Annexe A 3 p. 147

Annexe A 4 p. 149

REFERENCES p. 157

Symboles fréquemment utilisés dans le mémoire

- $\mathfrak{Im}(x)$ et $\mathfrak{Re}(x)$, respectivement partie imaginaire et la partie réelle du complexe x .

- exp(x), abréviation de exponentielle de x, (e^x) .

- $|x|$, valeur absolue ou module de x .

- $\not\approx$ peu différent de

- $\forall x$ pour tout x

- $\not\in$ appartient à

- Δx ou $\vec{\Delta}\,\vec{x}$, laplacien scalaire ou vectoriel de x ou $\vec{x}$.

- δ_{ij} symbole de Kronecker .

- sgn(x) signe du réel x

- $\int g(x)dx$ intégrale sur une période de g(x)

- $\sum_m$ équivaut à $\sum_{m=-\infty}^{+\infty}$

Ce travail s'inscrit dans le cadre des études entreprises depuis une dizaine d'années pour connaître les propriétés énergétiques des réseaux à partir des lois générales de l'électromagnétisme. A la suite des premiers travaux qui avaient permis la découverte d'un certain nombre de propriétés générales des réseaux de diffraction [1, 2, 3, 4] , R. Petit [3] et A. Wirgin [4] , en profitant des grosses possibilités du calcul sur ordinateurs, ont ouvert la voie aux travaux actuels. Seuls les cas simples des réseaux échelettes ou lamellaires infiniment conducteurs (figure 1)

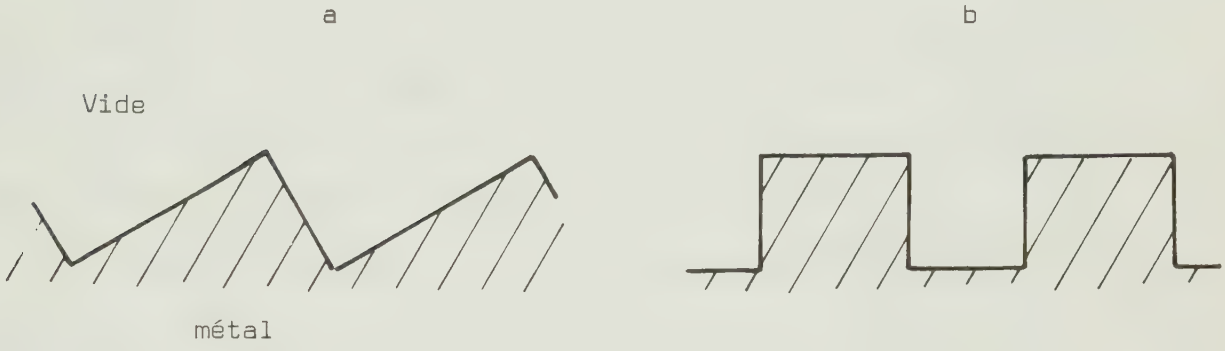


Fig. 1 - *a) réseau échelette , b) réseau lamellaire.*

étaient accessibles aux premiers programmes numériques. Pourtant, cette considérable limitation n'était pas déraisonnable, compte tenu de la gamme de fréquence dans laquelle opéraient généralement les opticiens et des contraintes pratiques tenant à la technologie des réseaux. Par la suite, les travaux de J. Pavageau et J. Bousquet [5] ont permis d'envisager l'étude des réseaux infiniment conducteurs de formes quelconques. Simultanément, G. Cerutti-Maori, R. Petit et M. Cadilhac [6], ainsi que A. R. Neureuther et K. Zaki [7] , usant de formalismes différents, se sont attachés au problème plus complexe des réseaux de conductivité finie, mais se sont souvent heurtés à de redoutables ennuis numériques.

La première partie de notre travail consiste essentiellement en une réflexion sur les théories existantes, dont la valeur heuristique n'est pas en doute, mais dont certains passages appellent, à notre avis, quelques modifications pour être mathématiquement rigoureux ... Cette période de formation a été aussi marquée par une collaboration avec les ingénieurs du département réseaux de Jobin-Yvon, en vue d'étudier théoriquement les propriétés des réseaux holographiques qui étaient récemment apparus sur le marché.

Des discussions avec des ingénieurs du Laboratoire d'Astronomie Spatiale ont attiré notre attention sur les montages de diffraction conique où le vecteur d'onde incident n'est plus dans le plan de section principale du réseau. Après une première étude théorique [8] , nous avons pu nous inspirer bénéfiquement de celles faites à la même époque par P. M. Van den Berg [9] et J. Ch. Bolomey [10] pour énoncer un théorème d'invariance peu intuitif mais très commode.

Afin de répondre à certaines questions posées par la reproduction industrielle de "mires", nous nous sommes intéressés au problème déjà résolu par A. Wirgin [4] des réseaux lamellaires et créneaux infiniment conducteurs. Le formalisme mathématique que nous avons utilisé présente l'intérêt d'être accessible aux chercheurs peu familiarisés avec les "fonctions de Green" ou les distributions. D'autre part, le temps de calcul des programmes numériques est très faible.

Enfin, la partie la plus originale du travail théorique a consisté à élaborer une théorie intégrale de la diffraction par les réseaux de conductivité finie. Elle présente l'intérêt d'aboutir à une seule équation intégrale du moins pour la "diffraction classique". Nous avons pu, à partir de là, élaborer des programmes numériques très généraux permettant de calculer l'efficacité d'un réseau de forme quelconque (c'est-à-dire dont le profil n'est pas forcément représentable par le graphe d'une fonction $y = f(x)$ et présentant

éventuellement des arêtes), dont les constantes électriques sont données, aussi grande ou aussi faible soit la conductivité. Ces programmes, dont nous avons pu montrer qu'ils étaient généralisables à la "diffraction conique", ont nécessité de longues études théoriques et numériques sur la sommation et l'intégration de quelques fonctions de deux variables données par des séries, et fréquemment rencontrées dans les équations intégrales de la diffraction.

Pour donner une idée de l'importance de ces dernières études, on peut signaler par exemple que le temps de calcul relatif au cas du réseau infiniment conducteur s'est vu par voie de conséquence réduit dans un rapport voisin de cinq !.Ces derniers programmes ont été et sont actuellement toujours exploités dans le cadre d'un contrat proposé par le Centre National d'Etudes Spatiales. Nous avons pu en tirer des conclusions imprévues sur le comportement de l'aluminium dans le domaine visible et surtout commencer l'étude systématique des réseaux utilisés dans l'immense domaine de l'ultra-violet, dont l'importance s'est considérablement accrue avec le développement actuel de l'Optique Spatiale.

Chaque fois que nous avons observé sur nos résultats théoriques des propriétés susceptibles d'être utilisées en Optique, nous avons naturellement essayé d'attirer l'attention sur les montages nouveaux qui pouvaient en découler.

Tous les résultats numériques figurant dans ce mémoire sont tirés du "formalisme intégral" de la diffraction. La plupart d'entre eux peuvent être aussi fournis par un "formalisme différentiel" qui fait l'objet d'études parallèles au laboratoire [11].

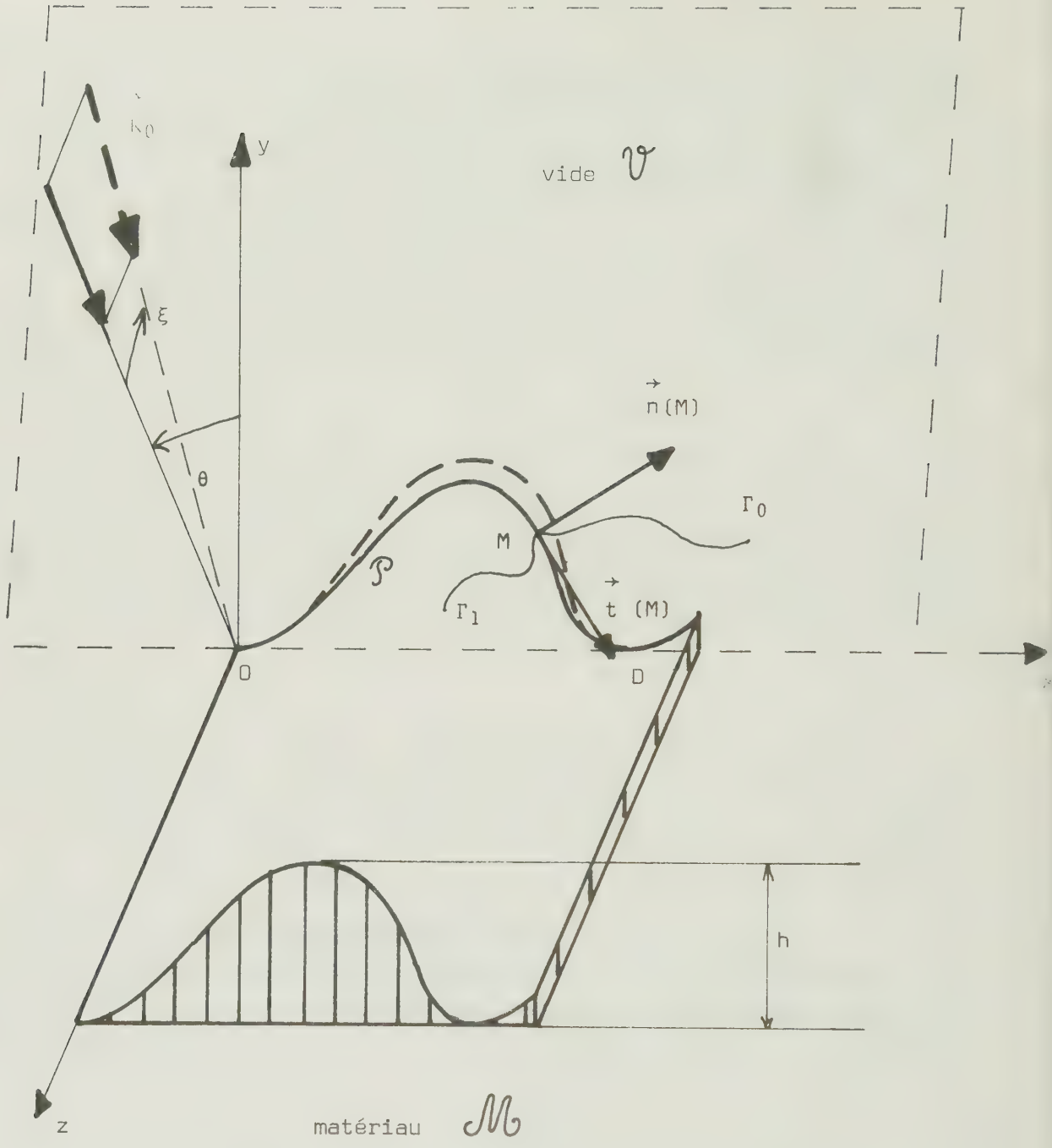


Figure 2 - Notations.
O D = d , les lignes en pointillés sont situées dans le plan d'incidence (contenant $\vec{k}_0$ et Ox).

CHAPITRE I

PROPRIETES GENERALES DES RESEAUX

Nous groupons dans ce chapitre les propriétés des réseaux issues directement des équations de l'électromagnétisme, sans recours à l'ordinateur.

1) DEFINITIONS ET NOTATIONS (figure 2)

L'espace est rapporté à un trièdre Oxyz orthonormé et $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sont les vecteurs unitaires de Ox , Oy , Oz . Le réseau, surface cylindrique de hauteur h et de pas $d = 2.\pi/K$ égal à la période du graphe $\mathcal{P}$ (profil) est toujours considéré infini. Il est plongé dans le vide $\mathcal{V}$ et on lui attribue soit une conductivité infinie, soit des caractéristiques électriques ε_1 , μ_1, égales respectivement à la permittivité complexe et la perméabilité du matériau $\mathcal{M}$ dont il est constitué. Il est éclairé par une onde plane de longueur d'onde $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, la projection du vecteur d'onde $\vec{k}_0$ ($|\vec{k}_0| = k_0$) sur xOy fait avec Oy l'angle θ (incidence) et avec $\vec{k}_0$ l'angle ξ (angle d'écart). ξ et θ sont affectés respectivement du signe de la projection de $\vec{k}_0$ sur Oz et Ox . Naturellement, $\vec{k}_0$ est toujours orienté vers les y négatifs et, sans restreindre l'étendue de l'étude, nous pouvons convenir de choisir $\vec{k}_0$ tel que ξ et θ soient positifs (sauf indication contraire). Donc si α , $-\beta$ et γ désignent les composantes du vecteur $\vec{u} = \dfrac{\vec{k}_0}{k_0}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin\theta \cos\xi > 0 , \\ \beta &= \cos\theta \cos\xi > 0 , \\ \gamma &= \sin\xi > 0 , \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1 . \qquad (2)$$

Suivant que ξ est nul ou différent de 0 , nous rangeons respectivement les phénomènes dans le cadre de la diffraction "classique" ou de la diffraction "conique". P , de coordonnées X et Y , désigne un point quelconque de l'espace, M(x,y) et M'(x',y') des points de $\mathcal{P}$ d'abscisses curvilignes s et s' . $\vec{n}(M)$ et $\vec{t}(M)$ sont la normale et la tangente

au réseau en un point M , $\vec{n}$ est orienté vers le vide et $\vec{t} = \vec{n} \wedge \vec{e}_3$; Γ_0 et Γ_1 désignent respectivement deux courbes quelconques de xOy passant par M et situées respectivement dans le vide et dans le réseau. Toute grandeur sinusoïdale $a\cos(\omega t - \phi)$ est systématiquement représentée par son amplitude complexe $a\exp(i\phi)$, ce qui suppose une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$. Nous envisageons successivement les deux cas de polarisation notés $H_\perp$ (resp. $E_\perp$) suivant que le champ magnétique (resp. électrique) incident $\vec{\mathcal{H}}^i$ (resp. $\vec{\mathcal{E}}^i$) est perpendiculaire à Oz . Nous appelons $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{E}}^d$ (resp. $\vec{\mathcal{H}}$ et $\vec{\mathcal{H}}^d$) les champs électriques (resp. magnétiques) totaux et diffractés, les champs diffractés étant définis, dans le vide, par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}^d &= \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}^i , \\ \vec{\mathcal{H}}^d &= \vec{\mathcal{H}} - \vec{\mathcal{H}}^i . \end{aligned} \tag{3}$$

Si v est une fonction définie en tout point du plan xOy , désignons par $\left[v(M)\right]_0$ la limite de $v(P)$ quand P , appartenant à Γ_0 , tend vers un point M de $\mathcal{P}$ et par $\left[v(M)\right]_1$ la limite de $v(P)$ quand P , appartenant à Γ_1 , tend vers M . De la même manière, on pose :

$$\left[\frac{dv(M)}{dn}\right]_0 = \lim_{P\to M,\ (P\in\Gamma_0)} \left(\vec{n}(M) \,.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v(P)\right) ,$$

$$\left[\frac{dv(M)}{dn}\right]_1 = \lim_{P\to M,\ (P\in\Gamma_1)} \left(\vec{n}(M) \,.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v(P)\right) ,$$

$$\left[\frac{dv}{dt}\right]_0 = \lim_{P\to M,\ (P\in\Gamma_0)} \left(\vec{t}(M) . \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v(P)\right) ,$$

$$\left[\frac{dv}{dt}\right]_1 = \lim_{P\to M,\ (P\in\Gamma_1)} \left(\vec{t}(M) . \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v(P)\right) .$$

L'indice complexe ν du matériau est donné par la relation :

$$\nu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad \text{avec} \quad \mathrm{Re}(\nu) > 0 ,$$

et nous posons :

$$k_1 = \nu k_0 .$$

2) MISE EN EQUATION

L'utilisation des équations de Maxwell et des conditions aux limites de l'électromagnétisme permet de montrer que dans le cas le plus général (diffraction conique et conductivité finie) les champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ vérifient l'ensemble des équations suivantes :

$$(4) \qquad \forall P \in \mathcal{V}, \quad \begin{cases} \vec{\Delta}\, \vec{\mathcal{E}}(P) + k_0^2\, \vec{\mathcal{E}}(P) = 0 , \\ \vec{\Delta}\, \vec{\mathcal{H}}(P) + k_0^2\, \vec{\mathcal{H}}(P) = 0 , \end{cases}$$

$$(5) \qquad \forall P \in \mathcal{M}, \quad \begin{cases} \vec{\Delta}\, \vec{\mathcal{E}}(P) + k_1^2\, \vec{\mathcal{E}}(P) = 0 , \\ \vec{\Delta}\, \vec{\mathcal{H}}(P) + k_1^2\, \vec{\mathcal{H}}(P) = 0 , \end{cases}$$

$$(6)\qquad \forall M \in \mathcal{P},\ \begin{cases} \vec{n}(M) \wedge \left[\vec{\mathcal{E}}(M)\right]_0 = \vec{n}(M) \wedge \left[\vec{\mathcal{E}}(M)\right]_1 , \\ \vec{n}(M) \wedge \left[\vec{\mathcal{H}}(M)\right]_0 = \vec{n}(M) \wedge \left[\vec{\mathcal{H}}(M)\right]_1 , \end{cases}$$

$$(7)\qquad \forall M \in \mathcal{P},\ \begin{cases} \varepsilon_0\, \vec{n}(M) \cdot \left[\vec{\mathcal{E}}(M)\right]_0 = \varepsilon_1\, \vec{n}(M) \cdot \left[\vec{\mathcal{E}}(M)\right]_1 , \\ \mu_0\, \vec{n}(M) \cdot \left[\vec{\mathcal{H}}(M)\right]_0 = \mu_1\, \vec{n}(M) \cdot \left[\vec{\mathcal{H}}(M)\right]_1 . \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{M}$ est infiniment conducteur, les champs sont nuls dans le réseau, mais il existe alors des courants et charges électriques surfaciques $\vec{J}(M)$ et $\Lambda(M)$ sur $\mathcal{P}$, par conséquent (4, I) est conservé, (5, I) est inutile et (6, I), (7, I) deviennent :

$$(6')\qquad \forall M \in \mathcal{P},\ \begin{cases} \vec{n}(M) \wedge \left[\vec{\mathcal{E}}(M)\right]_0 = 0 , \\ \vec{n}(M) \wedge \left[\vec{\mathcal{H}}(M)\right]_0 = \vec{J}(M) , \end{cases}$$

$$(7')\qquad \forall M \in \mathcal{P},\ \begin{cases} \varepsilon_0\, \vec{n}(M) \cdot \left[\vec{\mathcal{E}}(M)\right]_0 = \Lambda(M) , \\ \vec{n}(M) \cdot \left[\vec{\mathcal{H}}(M)\right]_0 = 0 . \end{cases}$$

Il faut naturellement adjoindre à ces équations des conditions de rayonnement à l'infini :

(8) si $Y \to +\infty$, $\vec{\mathcal{E}}^{\,d}$ et $\vec{\mathcal{H}}^{\,d}$ vérifient une condition d'ondes sortantes,

(9) si $Y \to -\infty$, $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ vérifient une condition d'ondes sortantes.

Nous n'introduisons pas pour l'instant les conditions d'intégrabilité de Meixner [12], nous devons donc supposer que $\mathcal{P}$ ne comporte pas de pointes ; nous verrons au prochain chapitre les précautions à prendre quand cette éventualité se présente.

Admettons qu'en vertu de l'origine physique du problème, il existe un et un seul couple de fonctions $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}})$ qui vérifie (4, I) à (9, I). Nous affirmons alors que nécessairement :

$$(10)\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}(X+d,Y,Z) = \exp(ik_0\gamma Z).\vec{\mathcal{E}}(X+d,Y,0) = \exp(ik_0\gamma Z).\exp(ik_0\alpha d).\vec{\mathcal{E}}(X,Y,0) , \\ \vec{\mathcal{H}}(X+d,Y,Z) = \exp(ik_0\gamma Z).\vec{\mathcal{H}}(X+d,Y,0) = \exp(ik_0\gamma Z).\exp(ik_0\alpha d).\vec{\mathcal{H}}(X,Y,0) . \end{cases}$$

On vérifie pour cela que, pour tout a, $\vec{\mathcal{E}}'$ et $\vec{\mathcal{H}}'$ définis par :

$$(11)\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}'(X,Y,Z) = \vec{\mathcal{E}}(X-d,Y,Z+a)\exp(+ik_0\alpha d)\exp(-ik_0\gamma a) , \\ \vec{\mathcal{H}}'(X,Y,Z) = \vec{\mathcal{H}}(X-d,Y,Z+a)\exp(+ik_0\alpha d)\exp(-ik_0\gamma a) , \end{cases}$$

vérifient (4, I) à (9, I), et comme, par ailleurs :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}'^{i} = \vec{\mathcal{E}}^{i}(X+d,Y,Z+a)\exp(-ik_0\alpha d)\exp(-ik_0\gamma a) = \vec{\mathcal{E}}^{i}(X,Y,Z) , \\ \vec{\mathcal{H}}'^{i} = \vec{\mathcal{H}}^{i}(X+d,Y,Z+a)\exp(-ik_0\alpha d)\exp(-ik_0\gamma a) = \vec{\mathcal{H}}^{i}(X,Y,Z) , \end{cases}$$

on en déduit, puisque la solution est unique :

$$(12)\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}'(X,Y,Z) = \vec{\mathcal{E}}(X,Y,Z) , \\ \vec{\mathcal{H}}'(X,Y,Z) = \vec{\mathcal{H}}(X,Y,Z) . \end{cases}$$

On trouve (10, I) en posant $a = -Z$ dans (11, I), et on peut donc écrire :

$$(13)\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}(X,Y,Z) = \vec{E}(X,Y)\exp(ik_0\gamma Z) , \\ \vec{\mathcal{H}}(X,Y,Z) = \vec{H}(X,Y)\exp(ik_0\gamma Z) , \end{cases}$$

où $\vec{E}(X,Y)$ et $\vec{H}(X,Y)$ sont des fonctions dépendant seulement des deux variables X et Y et pseudo-périodiques en X :

$$(14)\quad \begin{cases} \vec{E}(X+d,Y) = \vec{E}(X,Y)\exp(ik_0\alpha d)\ , \\ \vec{H}(X+d,Y) = \vec{H}(X,Y)\exp(ik_0\alpha d)\ . \end{cases}$$

L'équation (13, I) est très importante, puisqu'elle nous permet de supprimer la variable Z dans (4, I) et (5, I) :

$$(4')\quad \forall P \in \mathcal{V},\ \begin{cases} \vec{\Delta}\,\vec{E}(P) + \tilde{k}_0^2\,\vec{E}(P) = 0\ , \\ \vec{\Delta}\,\vec{H}(P) + \tilde{k}_0^2\,\vec{H}(P) = 0\ , \end{cases}$$

$$(5')\quad \forall P \in \mathcal{M},\ \begin{cases} \vec{\Delta}\,\vec{E}(P) + \tilde{k}_1^2\,\vec{E}(P) = 0\ , \\ \vec{\Delta}\,\vec{H}(P) + \tilde{k}_1^2\,\vec{H}(P) = 0\ , \end{cases}$$

avec :

$$(15)\quad \begin{cases} \tilde{k}_0^2 = k_0^2\,(1-\gamma^2)\ , \\ \tilde{k}_1^2 = k_1^2 - k_0^2\gamma^2 = k_0^2\,(\nu^2-\gamma^2)\ . \end{cases}$$

Enfin, dans le cas particulier de la diffraction "classique" ($\xi = 0$), on peut établir grâce à l'unicité que dans le cas de polarisation $H_\perp$ (resp. $E_\perp$), $\vec{E}$ (resp. $\vec{H}$) reste parallèle à lui-même, ce qui permet de remplacer les vecteurs par des scalaires dans les équations que nous venons d'écrire. Cette importante simplification nous amène à définir le cas fondamental E // (resp. H //) par le cas de polarisation $H_\perp$ (resp. $E_\perp$) de diffraction classique où l'onde incidente $\vec{\mathcal{E}}^{\,i}$ (resp. $\vec{\mathcal{H}}^{\,i}$) a une amplitude unité. Nous notons alors par les mêmes caractères, non surmontés d'une flèche, les projections sur Oz des vecteurs parallèles à cet axe (par exemple, dans le cas E // : $\vec{E}(P) = E(P)\ .\ \vec{e}_3$) .

3) VALIDITE DU DEVELOPPEMENT DE RAYLEIGH

Nous rappelons ici que dans certains domaines les champs peuvent se mettre sous la forme très simple d'un développement en ondes planes. (14, I) permet de développer $\vec{E}(X,Y)\exp(-ik_0\alpha X)$ et $\vec{H}(X,Y)\exp(-ik_0\alpha X)$ en séries de Fourier :

$$\begin{cases} \vec{E}(X,Y)\exp(-ik_0\alpha X) = \sum_m \vec{F}_m(Y)\exp(imKX) , \\ \vec{H}(X,Y)\exp(-ik_0\alpha X) = \sum_m \vec{G}_m(Y)\exp(imKX) . \end{cases}$$

Donc, pour tout point P de coordonnées X et Y :

$$(16)\quad \begin{cases} \vec{E}(X,Y) = \sum_m \vec{F}_m(Y)\exp(ik_0\alpha_m X) \\ \vec{H}(X,Y) = \sum_m \vec{G}_m(Y)\exp(ik_0\alpha_m X) , \end{cases}$$

$$(17)\quad \text{avec} \qquad \alpha_m = \alpha + m\cdot\frac{K}{k_0} = \alpha + m\frac{\lambda_0}{d} .$$

En portant (16, I) dans (4', I) et (5', I), on obtient :

$$(18)\quad \forall P \in \mathcal{V} \begin{cases} \sum_m \left[\frac{d^2\vec{F}_m(Y)}{dY^2} + k_0^2\,\beta_m^2\,\vec{F}_m(Y)\right]\exp(ik_0\alpha_m X) = 0 , \\ \sum_m \left[\frac{d^2\vec{G}_m(Y)}{dY^2} + k_0^2\,\beta_m^2\,\vec{G}_m(Y)\right]\exp(ik_0\alpha_m X) = 0 , \end{cases}$$

$$(19)\quad \forall P \in \mathcal{M},\ \begin{cases} \sum_m \left[\dfrac{d^2 \vec{F}_m(Y)}{dY^2} + k_0^2\, r_m^2\, \beta_m^2\, \vec{F}_m(Y) \right] \exp(ik_0 \alpha_m X) = 0 , \\ \sum_m \left[\dfrac{d^2 \vec{G}_m(Y)}{dY^2} + k_0^2\, r_m^2\, \beta_m^2\, \vec{G}_m(Y) \right] \exp(ik_0 \alpha_m X) = 0 , \end{cases}$$

$$(20)\quad \text{avec} \begin{cases} \beta_m = \sqrt{1 - \gamma^2 - \alpha_m^2} \quad \text{ou} \quad i\sqrt{\gamma^2 + \alpha_m^2 - 1} , \\ r_m = \sqrt{\dfrac{\nu^2 - \gamma^2 - \alpha_m^2}{1 - \gamma^2 - \alpha_m^2}} , \quad \mathcal{I}m(\beta_m r_m) > 0 . \end{cases}$$

Les premiers membres de (18, I) et (19, I) sont, à un facteur multiplicatif près, des séries de Fourier de la variable X, par conséquent avant de supprimer les signes somme et déclarer nul chacun des coefficients des séries de Fourier, il faut s'assurer que les équations sont vérifiées pour tout X. Ceci est vrai si $Y > h$ pour (18, I) et si $Y < 0$ pour (19, I) (figure 3). On en déduit élémentairement :

$$(21)\quad Y > h \begin{cases} \vec{F}_m(Y) = \sum_m \vec{A}_m \exp(-ik_0 \beta_m Y) + \vec{B}_m \exp(ik_0 \beta_m Y) , \\ \vec{G}_m(Y) = \sum_m \vec{A}'_m \exp(-ik_0 \beta_m Y) + \vec{C}_m \exp(ik_0 \beta_m Y) , \end{cases}$$

$$(22)\quad Y < 0 \begin{cases} \vec{F}_m(Y) = \sum_m \vec{D}_m \exp(-ik_0 r_m \beta_m Y) + \vec{A}''_m \exp(ik_0 r_m \beta_m Y) , \\ \vec{G}_m(Y) = \sum_m \vec{E}_m \exp(-ik_0 r_m \beta_m Y) + \vec{A}'''_m \exp(ik_0 r_m \beta_m Y) . \end{cases}$$

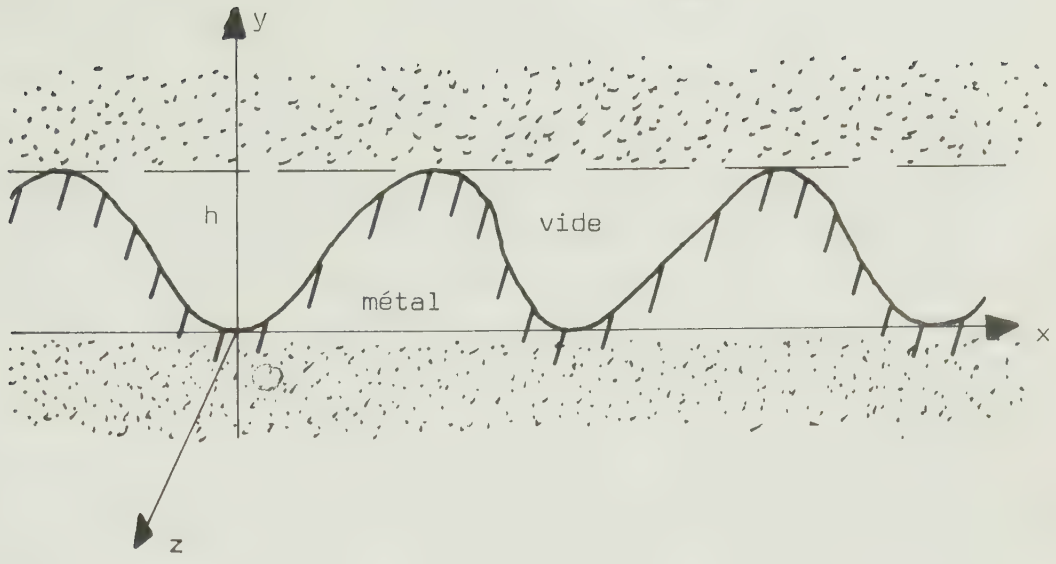


Figure 3 - Dans chaque région pointillée, le champ peut se mettre sous la forme d'un développement de Rayleigh.

En portant (21, I) et (22, I) dans (16, I) puis (13, I), et compte tenu des conditions d'ondes sortantes (8, I) et (9, I), on trouve finalement :

$$(23)\qquad Y > h \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}(X,Y,Z) = \vec{\mathcal{E}}^{i}(X,Y,Z) + \sum_m \vec{B}_m \exp\left(ik_0(\alpha_m X + \beta_m Y + \gamma Z)\right), \\ \vec{\mathcal{H}}(X,Y,Z) = \vec{\mathcal{H}}^{i}(X,Y,Z) + \sum_m \vec{C}_m \exp\left(ik_0(\alpha_m X + \beta_m Y + \gamma Z)\right), \end{cases}$$

$$(24)\qquad Y < 0 \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}(X,Y,Z) = \sum_m \vec{D}_m \exp\left(ik_0(\alpha_m X - r_m\beta_m Y + \gamma Z)\right), \\ \vec{\mathcal{H}}(X,Y,Z) = \sum_m \vec{E}_m \exp\left(ik_0(\alpha_m X - r_m\beta_m Y + \gamma Z)\right). \end{cases}$$

Pour les réseaux métalliques où ν n'est pas réel, $r_m\beta_m$ est un nombre complexe dont la partie imaginaire est positive, il s'ensuit que les ondes représentées dans (24, I) sont exponentiellement amorties en Y :

ce résultat, satisfaisant pour l'esprit, nous explique pourquoi la connaissance des $\vec{D}_m$ et $\vec{E}_m$ n'intéresse pas l'opticien, sauf cas exceptionnel. Il en va de même dans (23, I) pour les termes où β_m est imaginaire pur : on parle alors d'ondes évanescentes ; par contre, si β_m est réel (ce qui, d'après (20, I) ne se produit que pour un ensemble $\mathcal{U}$ fini de valeurs de m), l'onde plane associée est une onde progressive se dirigeant vers les y positifs et c'est l'ensemble de ces dernières ondes qui, pratiquement, constitue le champ diffracté pour l'observateur, toujours situé à une distance du réseau très grande devant la longueur d'onde.

On a longtemps cru que les développements (23, I) et (24, I), appelés développements de Rayleigh, étaient susceptibles de représenter partout (même pour $0 < Y < h$) le champ ; c'est à partir de cette hypothèse, grâce à la vulgarisation du calcul sur ordinateur et en supposant $\mathcal{M}$ infiniment conducteur, que les premiers calculs d'efficacité (détermination des $\vec{B}_m$) furent effectués, en dépit d'une mise en garde de B.A. Lippmann [13]. Au cours des dix dernières années, beaucoup de travaux [14, 15, 16, 17, 18, 19] ont défendu la cause de B.A. Lippmann qui nous semble aujourd'hui définitivement entendue : le développement en ondes planes n'est utilisable que dans des conditions très particulières liées au profil du réseau ; un travail voulant être général ne peut donc s'en contenter.

Ainsi, loin du réseau, dans la région intéressante pour l'Optique, le champ diffracté à une forme simple qui peut être caractérisée par la donnée de quelques coefficients. La détermination de ces coefficients ne peut malheureusement se faire qu'en écrivant une condition aux limites sur le réseau, c'est-à-dire dans une région où cette forme simple ne peut pas en général représenter le champ.

CONSEQUENCE : "FORMULE DES RESEAUX" EN "DIFFRACTION CONIQUE" ET CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DES RAYONS DIFFRACTES.

Nous avons tous appris dans les lycées la "formule des réseaux" qui permet de connaître, moyennant un calcul très simple, les directions de diffraction ; une construction géométrique en découle [20]. Il est possible, grâce à (23, I), de généraliser cette formule à la diffraction conique.

Le vecteur unitaire $\vec{u}_m$ $(\alpha_m , \beta_m , \gamma)$ d'une direction de diffraction a une composante sur Oz indépendante de m et égale à γ : les directions de propagation se répartissent donc sur la nappe de cône d'axe Oz qui contient le vecteur unitaire de l'onde incidente, d'où le nom de "diffraction conique". La direction de propagation est donc parfaitement repérée par l'angle θ_m de Oy avec la projection de $\vec{u}_m$ sur xOy, nous adopterons pour θ_m la convention usuelle en lui donnant le signe de la projection du $\vec{u}_m$ sur Ox. On trouve, au prix d'un calcul élémentaire :

$$\sin \theta_m = \sin \theta + m . \frac{\tilde{\lambda}_0}{d} , \tag{25}$$

avec :

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{\lambda_0}{\cos \xi} . \tag{26}$$

Le résultat est donc particulièrement simple : la nouvelle "formule des réseaux" s'obtient en remplaçant dans la formule classique la longueur d'onde λ_0 par une longueur d'onde fictive $\tilde{\lambda}_0$ plus grande et donnée par (26, I). La figure 4 permet une construction géométrique des directions diffractées.

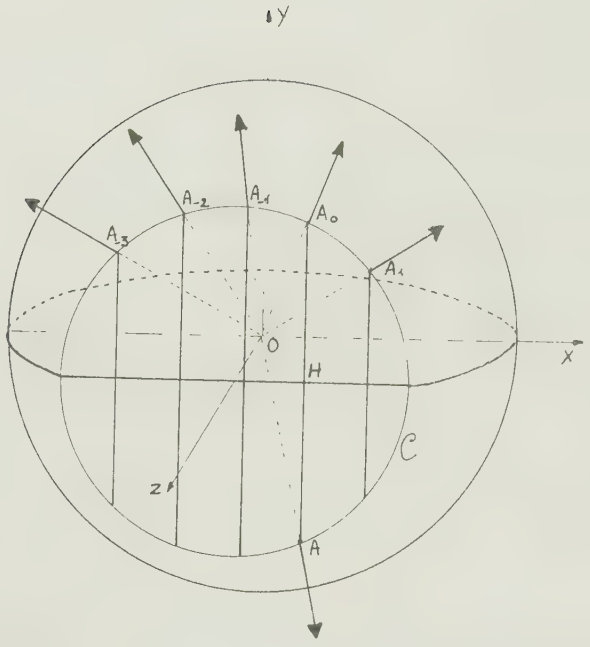


Figure 4 -

Diffraction conique.

Soit S une sphère de centre O et de rayon unité et A l'intersection de cette sphère avec son diamètre parallèle à $\vec{u}$ ($\vec{OA} = \vec{u}$) . Le plan Π passant par A et perpendiculaire à Oz coupe S suivant un cercle $\mathcal{C}$. Si A_0 , A_1 , ... , A_j sont les intersections avec $\mathcal{C}$ d'une famille de demi-droites parallèles à Oy et équidistantes de λ_0/d , on vérifie d'après (25, I) que $\vec{OA}_0$, $\vec{OA}_1$, ... , $\vec{OA}_j$ sont respectivement égaux à $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, ... , $\vec{u}_j$. Tous les $\vec{OA}_j$ sont sur le cône circulaire de sommet O et de directrice $\mathcal{C}$. Ce cône dégénère en un plan si $\xi = 0$; c'est alors un grand cercle de S et l'on retrouve la construction classique [20] .

4) LE THEOREME DE RECIPROCITE

On a longtemps cru que ce théorème, appelé quelquefois "théorème de symétrie" était applicable aux seuls réseaux infiniment conducteurs [2, 21, 22]. Récemment, le chercheur australien R. C. Mc Phedran nous a suggéré, à la lumière de quelques travaux expérimentaux de M. C. Hutley, que ce théorème pourrait bien être valable aussi pour les réseaux de conductivité finie. Pour un réseau donné, M. C. Hutley faisait varier l'incidence d'un faisceau laser dans le plan de section principale. Nous allons montrer maintenant comment on peut prévoir théoriquement une propriété importante des courbes tracées par M. C. Hutley, en supposant par exemple que le champ électrique est parallèle aux traits du réseau.

On fixe, comme dans l'expérience, le profil et le matériau du réseau, ainsi que la longueur d'onde, et on considère successivement deux incidences θ et θ' , comprises entre - 90° et + 90°. Dans les zones de validité du développement de Rayleigh les champs E et E' correspondants peuvent s'écrire, d'après (23, I), (24, I), (17, I) et (20, I) sous une forme simple :

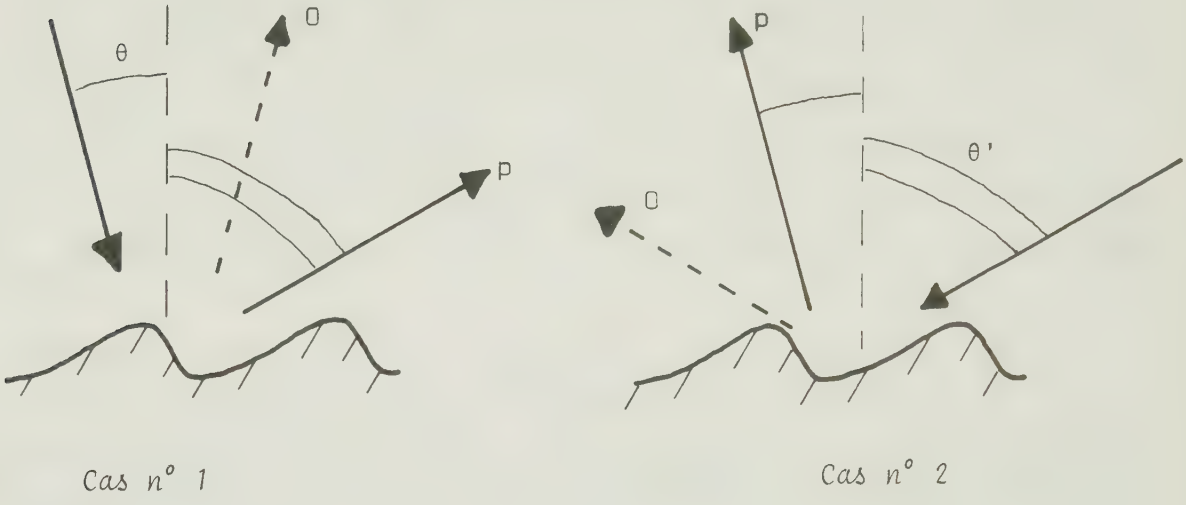
Cas n° 1 (incidence θ):

$$(27)\quad \begin{cases} \forall Y > h\ ,\ E(X, Y) = \exp\left[ik_0(X \sin\theta - Y \cos\theta)\right] + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \exp\left[ik_0(\alpha_m X+\beta_m Y)\right] , \\ \forall Y < 0\ ,\ E(X, Y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left[i\, k_0\, (\alpha_m X - r_m\ \beta_m\ Y)\right] ; \end{cases}$$

Cas n° 2 (incidence θ')

$$(27')\quad \begin{cases} \forall Y > h\ ,\ E'(X, Y) = \exp\left[ik_0(X \sin\theta' - Y \cos\theta')\right] + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B'_m \\ \qquad\qquad \cdot \exp\left[ik_0\, (\alpha'_m X + \beta'_m Y)\right] , \\ \forall Y < 0\ ,\ E'(X, Y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D'_m \exp\left[ik_0\, (\alpha'_m X - r'_m \beta'_m Y)\right] . \end{cases}$$

Si θ' est tel que $\sin \theta' = - \alpha_p$ (ce qui suppose que p appartient à l'ensemble $\mathcal{U}$ des entiers m tels que β_m soit réel), on en déduit que $\cos \theta' = \beta_p$, donc, d'après (27, I) et (27', I), l'onde incidente du cas n° 2 se propage dans la même direction (mais dans le sens inverse) que l'onde plane progressive du cas n° 1 diffractée dans l'ordre p . (figure 5).



Cas n° 1 Cas n° 2

Figure 5

De (17, I), on tire, compte tenu de l'hypothèse sur θ' :

(28) $\forall_q \ , \ \alpha_q = - \alpha'_{p-q} \ ,$

et en particulier $\sin \theta = - \alpha'_p$, ce qui permet d'inverser la propriété précédemment énoncée en permutant cas n° 1 et cas n° 2.

Ce "théorème du retour inverse",très connu, est schématisé sur la figure 5. Le but du calcul qui va suivre est de montrer que cette propriété géométrique s'accompagne d'une propriété énergétique : il existe une relation entre B_p et B'_p .

Considérons dans le plan x Oy (figure 6) les deux domaines $\mathcal{D}_v$ et $\mathcal{D}_m$ définis sur une période du réseau et limités par $\mathcal{S}$ et deux parallèles à O x en $Y = Y_v > h$ et $Y = Y_m < 0$.

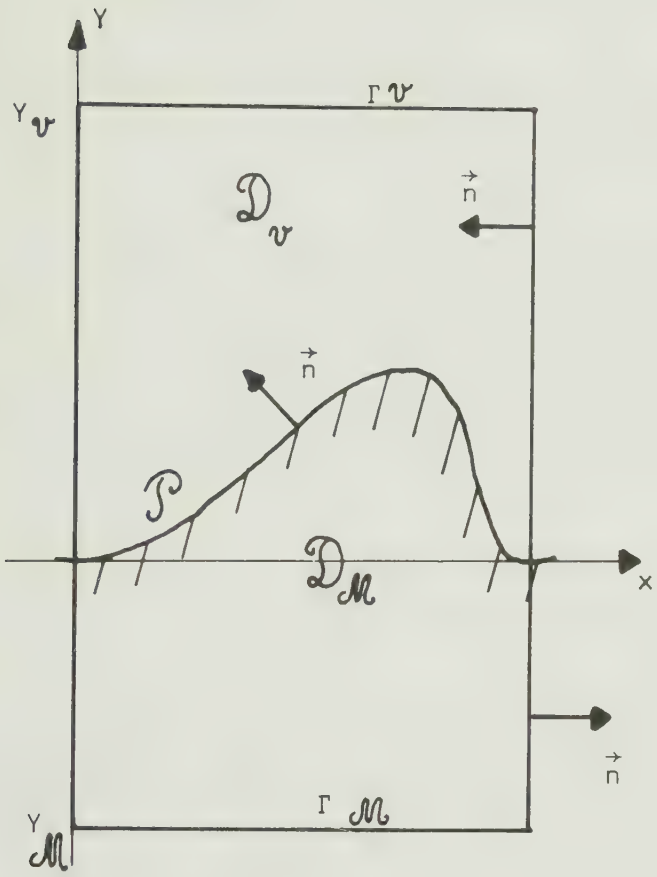


Figure 6

De (4, I) et (13, I), on peut déduire :

$$\forall P \in \mathcal{D}_v, \begin{cases} \Delta E(P) + k_0^2 E(P) = 0 , \\ \Delta E'(P) + k_0^2 E'(P) = 0 , \end{cases}$$

où Δ est le symbole du Laplacien scalaire.

Après multiplication de la première équation par E'(P) , de la seconde par - E (P) et addition des deux, il vient :

(29) $\forall P \in \mathcal{D}_\nu \quad , \quad E'(P)\,\Delta E(P) - E(P)\,\Delta E'(P) = 0 \quad .$

Si on intègre le premier membre de (29, I) sur $\mathcal{D}_\nu$ et qu'on applique la formule de Green, afin de transformer l'intégrale sur une surface par une intégrale sur un contour, on obtient finalement :

(30) $$\int_{\Gamma_\nu} \left(E' \frac{dE}{dn} - E \frac{dE'}{dn}\right) d\ell = 0 \quad ,$$

$d\ell$ désignant un élément différentiel d'abscisse curviligne pris sur Γ_ν frontière de $\mathcal{D}_\nu$ et la normale étant orientée vers l'intérieur d'après nos conventions précédentes. Un calcul analogue permet d'établir :

(31) $$\int_{\Gamma_\mathcal{M}} \left(E' \frac{dE}{dn} - E \frac{dE'}{dn}\right) d\ell = 0 \quad ,$$

où $\Gamma_\mathcal{M}$ est la frontière de $\mathcal{D}_\mathcal{M}$, la normale étant cette fois orientée vers l'intérieur.

La contribution dans (30, I) et (31, I) des segments de Γ_ν et $\Gamma_\mathcal{M}$ parallèles à OY est nulle d'après (14, I). D'autre part, en utilisant (28, I) et en se souvenant des propriétés d'orthogonalité des exponentielles figurant dans (27, I) et (27', I), on peut montrer :

$$\int_{y=Y_\mathcal{M}} \left(E' \frac{dE}{dn} - E \frac{dE'}{dn}\right) dx = 0 \quad ,$$

si bien que, compte tenu de (31, I) :

(32) $$\int_{\mathcal{P}} \left(\left[E'(M)\right]_1 \left[\frac{dE}{dn}(M)\right]_1 - \left[E(M)\right]_1 \left[\frac{dE'}{dn}(M)\right]_1 \right) ds = 0 \quad .$$

Après utilisation de la condition de passage (6, I) et des équations de Maxwell, (32, I) devient :

$$\int_{\mathcal{P}} \left(\left[E'(M) \right]_0 \left[\frac{dE}{dn}(M) \right]_0 - \left[E(M) \right]_0 \left[\frac{dE'}{dn}(M) \right]_0 \right) ds = 0 ,$$

et donc, d'après (30, I)† :

$$(33) \qquad \int_{Y=Y_{\mathcal{V}}} \left(E' \frac{\partial E}{\partial y} - E \frac{\partial E'}{\partial y} \right) dx = 0 .$$

En portant dans (33, I) les développements contenus dans (27, I) et (27', I), puis en tenant compte, comme précédemment, des propriétés d'orthogonalité des exponentielles, on obtient finalement la relation cherchée :

$$(34) \qquad \beta' B_p = \beta B'_p .$$

Cette dernière équation relie les amplitudes, les opticiens préfèrent généralement parler d'efficacité ††, aussi nous écrirons (34, I) sous la forme :

$$\frac{\beta'}{\beta} |B_p|^2 = \frac{\beta}{\beta'} |B'_p|^2 ,$$

† On remarquera que si la conductivité est infinie, la même relation peut être obtenue, puisque le champ électrique est nul sur $\mathcal{P}$.

†† On appelle efficacité ρ_m de l'onde plane diffractée dans l'ordre m le flux de puissance de cette onde à travers une surface unitaire parallèle au plan moyen du réseau, rapporté au flux incident. Donc, ici,

$$\rho_m = \frac{\beta_m}{\beta} |B_m|^2 .$$

(35) Soit $\boxed{\rho_p = \rho'_p}$.

Le "retour inverse" s'accompagne donc d'une importante propriété : l'efficacité ne dépend pas du sens de propagation de l'onde.

Sur les courbes tracées par M. C. Hutley, on doit donc s'attendre à trouver la même efficacité dans l'ordre p si θ et θ' sont liés par la relation :

$$\sin \theta' = - \sin \theta - p \frac{\lambda_0}{d} \quad .$$

Nous pourrons vérifier au chapitre IV l'exactitude de cette prévision.

5) PROPRIETES SPECIFIQUES DU RESEAU INFINIMENT CONDUCTEUR

On considère souvent que l'aluminium utilisé dans la fabrication des réseaux de diffraction peut être considéré comme infiniment conducteur dans les zones du visible et de l'infrarouge. Même si par la suite nous émettons d'importantes réserves sur cette affirmation, il est certain que l'hypothèse de la conductivité infinie permet une simplification importante et bien des propriétés en découlent.

5 - 1. TOUT PROBLEME DE DIFFRACTION PAR UN RESEAU INFINIMENT CONDUCTEUR PEUT ETRE ASSOCIE A UN PROBLEME DE DIFFRACTION "CLASSIQUE".

Nous voulons ici démontrer une propriété très importante des réseaux infiniment conducteurs : la "diffraction conique" ne pose pas de problème nouveau quand on sait traiter la "diffraction classique" ($\xi = 0$). Nous montrons d'abord, en nous inspirant des travaux de P. M. Van den Berg [9] et J. C. Bolomey [10] qu'un problème de "diffraction conique" se rattache à deux cas fondamentaux $E //$ et $H //$.

Dans chacun de ces cas fondamentaux, compte tenu de la conductivité infinie, (4', I), (6', I), (8', I) et (23, I) se simplifient considérablement.

Dans le cas $E //$, le champ électrique reste parallèle à Oz et nous désignons donc par E, E^i et E^d les projections sur Oz de $\vec{E}$, $\vec{E}^i$ et $\vec{E}^d$. On trouve aisément :

(36) $\quad \forall P \in \mathcal{V}$, $\Delta E^d(P) + k_0^2 E^d(P) = 0$,

(37) $\quad \forall M \in \mathcal{P}$, $E^d(M) = - E^i(M) = - \exp\left[ik_0 (\alpha x - \beta y)\right]$,

(38) $\quad$ si $Y \to + \infty$, E^d vérifie une condition d'ondes sortantes.

Dans ce cas, le développement de Rayleigh qui représente le champ pour $Y > h$ est caractérisé par des coefficients scalaires $B_m^\infty = \vec{B}_m \cdot \vec{e}_3$.

De même, dans le cas H // , on définit H, H^i et H^d et on a :

(39) $\forall P \in \mathcal{V}$, $\Delta H^d(P) + k_0^2 H^d(P) = 0$,

(40) $\forall M \in \mathcal{P}$, $\left[\frac{dH^d(M)}{dn}\right]_0 = - \left[\frac{dH^i(M)}{dn}\right]_0 - ik_0(\alpha n_x - \beta n_y)$

$\cdot \exp\left[ik_0(\alpha x - \beta y)\right]$,

(41) si $Y \to \infty$, H^d vérifie une condition d'ondes sortantes,

n_x et n_y désignent les projections de $\vec{n}$ sur Ox et Oy.

Le développement de Rayleigh est caractérisé cette fois par des coefficients $C_m^\infty = \vec{C}_m \cdot \vec{e}_3$.

Dans le cas général, il est commode de définir le champ incident par les amplitudes a_x , a_y et a_z des trois composantes du champ incident $\vec{E}^i$ sur les axes de coordonnées et après introduction des projections E_z^d et H_z^d des champs sur Oz , on montre à partir de (4', I), (6', I), (8, I) et des équations de Maxwell que chacune de ces fonctions vérifie des conditions très proches de celles définissant les cas fondamentaux. On trouve par exemple que E_z^d qui vérifie une condition d'ondes sortantes pour $Y \to \infty$ vérifie aussi :

(39') $\forall P \in \mathcal{V}$, $\Delta E_z^d(P) + \tilde{k}_0^2 E_z^d(P) = 0$,

(40') $\forall M \in \mathcal{P}$, $E_z^d(M) = - E_z^i(M) = - a_z \exp\left[(ik_0(\alpha x - \beta y)\right]$.

Malheureusement le coefficient $\tilde{k}_0$ donné par (15, I) et qu'on trouve dans (39', I) est différent du k_0 de la formule (41', I) ; pour

remédier à cela, on introduit les composantes $\tilde{\alpha}$, $-\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}_m$ et $\tilde{\beta}_m$ des vecteurs unitaires des projections de $\vec{u}$ et $\vec{u}_m$ sur xOy :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad ,$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad ,$$

$$\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 = 1 \quad ,$$

$$\tilde{\alpha}_m = \tilde{\alpha} + m\frac{\tilde{\lambda}_0}{d} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad ,$$

$$\tilde{\beta}_m = \tilde{\beta} + m\frac{\tilde{\lambda}_0}{d} = \frac{\beta_m}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad ,$$

$$\tilde{\alpha}_m^2 + \tilde{\beta}_m^2 = 1 \quad .$$

L'équation (40', I) prend alors la forme souhaitée :

(40") $\quad \forall M \in \mathcal{P} \quad , \quad E_z^d(M) = - a_z \exp\left\{ i\tilde{k}_0(\tilde{\alpha}X - \tilde{\beta}Y) \right\} \quad ,$

ce qui permet d'affirmer que E_z^d/a_z est la solution d'un cas fondamental E // classique défini par la longueur d'onde $\tilde{\lambda}_0$ et l'incidence θ .

Grâce à la linéarité des équations de Maxwell, il en résulte, pour $Y > h$:

$$(42) \qquad E_z^d = \sum_m a_z \, B_m^\infty \exp\left\{i\tilde{k}_0(\tilde{\alpha}_m X + \tilde{\beta}_m Y)\right\} ,$$

les coefficients B_m^∞ étant naturellement associés au cas fondamental E // traité avec la longueur d'onde $\tilde{\lambda}_0$ et l'incidence θ .

De la même façon, H_z^d est solution d'un problème du type H // et on trouve que si $Y > h$:

$$(43) \qquad H_z^d = \sum_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\alpha a_y + \beta a_x) \, C_m^\infty \exp\left\{i\tilde{k}_0(\tilde{\alpha}_m X + \tilde{\beta}_m Y)\right\} ,$$

les C_m^∞ étant associés au cas fondamental H // .

E_z et H_z étant ainsi déterminés, les autres composantes du champ électromagnétique s'obtiennent aisément par des formules bien connues dans la théorie des guides d'onde [23] et résultant directement des équations de Maxwell :

$$\tilde{k}_0^2 H_x = - i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial Y} + ik_0\gamma \frac{\partial H_z}{\partial X} ,$$

$$\tilde{k}_0^2 H_y = i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial X} + ik_0\gamma \frac{\partial H_z}{\partial Y} ,$$

$$\tilde{k}_0^2 E_x = i\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial Y} + ik_0\gamma \frac{\partial E_z}{\partial X} ,$$

$$\tilde{k}_0^2 E_y = - i\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial X} + ik_0\gamma \frac{\partial E_z}{\partial Y} .$$

Tous calculs faits, on trouve que si $Y > h$:

$$(44) \qquad \vec{E}^d = \sum_m (P_m \vec{e}_1 + Q_m \vec{e}_2 + R_m \vec{e}_3) \exp\left\{ i\tilde{k}_0(\tilde{\alpha}_m x + \tilde{\beta}_m y) \right\} ,$$

avec :

$$(45) \qquad P_m = - \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \left\{ (\alpha a_y + \beta a_x) \tilde{\beta}_m C_m^\infty + \gamma a_z \tilde{\alpha}_m B_m^\infty \right\},$$

$$(46) \qquad Q_m = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \left\{ (\alpha a_y + \beta a_x) \tilde{\alpha}_m C_m^\infty - \gamma a_z \tilde{\beta}_m B_m^\infty \right\},$$

tandis que les considérations habituelles sur le vecteur de Poynting montrent que l'efficacité ρ_m dans l'ordre m est donnée par :

$$(47) \qquad \boxed{\rho_m = \frac{\beta_m}{\beta} \left\{ |C_m^\infty|^2 \quad (\tilde{\alpha} a_y + \tilde{\beta} a_x)^2 + |B_m^\infty|^2 \quad \frac{a_z^2}{1 - \gamma^2} \right\} .}$$

Nous venons donc de montrer que l'efficacité d'un réseau dans un montage de diffraction conique se déduit aisément de la connaissance des efficacités dans deux cas fondamentaux adaptés. Remarquons encore que dans le cas $E_\perp$ de diffraction conique, nous avons par définition $a_z = 0$, donc d'après (42, I) E_z^d et $\frac{d}{z}$ sont eux aussi nuls, cette propriété se transpose aisément au cas $H_\perp$. Nous pouvons donc affirmer que, pour un réseau infiniment conducteur, si le champ incident $\vec{\mathcal{E}}^i$ (resp. $\vec{\mathcal{H}}^i$) est orthogonal à Oz, le champ diffracté $\vec{\mathcal{E}}^d$ (resp. $\vec{\mathcal{H}}^d$) est aussi orthogonal à Oz .

Nous allons maintenant établir un théorème d'invariance peu intuitif et très utile par la suite. Supposons que le vecteur d'onde incident $\vec{k}_0$ varie de sorte que sa projection sur le plan de section principale du réseau (plan xOy) soit fixe : $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{k}_0$, $\tilde{\alpha}_m$ et $\tilde{\beta}_m$ restent constants $\forall m$ et $\vec{k}_0$ reste orthogonal à un vecteur unitaire $\vec{U}$ $(\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}$, $0)$ du plan xOy. Supposons de plus que l'état de polarisation de l'onde incidente soit repéré par la donnée de l'angle δ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{a}$, alors :

$$\vec{a} \cdot \vec{U} = \cos \delta = a_x \tilde{\beta} + a_y \tilde{\alpha} ,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = 0 = a_x \alpha - a_y \beta + a_z \gamma ,$$

$$\text{soit :} \quad - \frac{a_z \gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} = a_x \tilde{\alpha} - a_y \tilde{\beta} ,$$

et, par combinaison :

$$\cos^2 \delta + \frac{a_z^2 \gamma^2}{1 - \gamma^2} = a_x^2 + a_y^2 = 1 - a_z^2 , \qquad \frac{a_z^2}{1 - \gamma^2} = \sin^2 \delta .$$

L'efficacité ρ_m reste donc constante pour un état de polarisation donné puisque, d'après (47, I) :

$$(48) \qquad \rho_m = \frac{\tilde{\beta}_m}{\tilde{\beta}} \left(|C_m^\infty|^2 \cos^2 \delta + |B_m^\infty|^2 \sin^2 \delta \right) .$$

Elle est extrêmale pour $\delta = 0$ et $\delta = \frac{\pi}{2}$, ces deux valeurs correspondent d'ailleurs aux deux états de polarisation remarquables que nous avons noté $E_\perp$ et $H_\perp$. Nous pouvons finalement énoncer le

théorème suivant que nous utiliserons dans le chapitre V pour en tirer une application pratique :

THEOREME :

Si l'onde incidente varie de sorte que la projection de son vecteur d'onde sur le plan de section principale du réseau soit fixe :

a) la projection sur ce même plan du vecteur d'onde diffracté dans l'ordre m reste également fixe,

b) l'efficacité dans l'ordre m ne varie pas non plus pourvu que l'état de polarisation de l'onde incidente soit fixé.

5 - 2. LA LOI DE CONSERVATION D'ENERGIE

Cette loi a déjà été utilisée par de nombreux auteurs dans le domaine de la diffraction "classique", on pourra en trouver une démonstration dans [20]. Le théorème du précédent paragraphe nous permet une généralisation immédiate à la diffraction conique : il suffit d'associer à un cas de "diffraction conique" le cas correspondant de "diffraction classique" (δ étant le même) et d'appliquer le critère d'énergie bien connu :

$$\sum_{m \in \mathcal{U}} |\vec{B}_m|^2 \, \tilde{\beta}_m = \tilde{\beta} \quad . \tag{49}$$

Cette formule possède le grand intérêt de fournir à la fin d'un calcul numérique une vérification rapide et précise des résultats obtenus.

5 - 3. INTERFERENCES A QUATRE ONDES PLANES, APPLICATIONS AUX RESEAUX ECHELETTES.

Nous énonçons tout d'abord un théorème démontré par A. Maréchal et G. W. Stroke [1] :

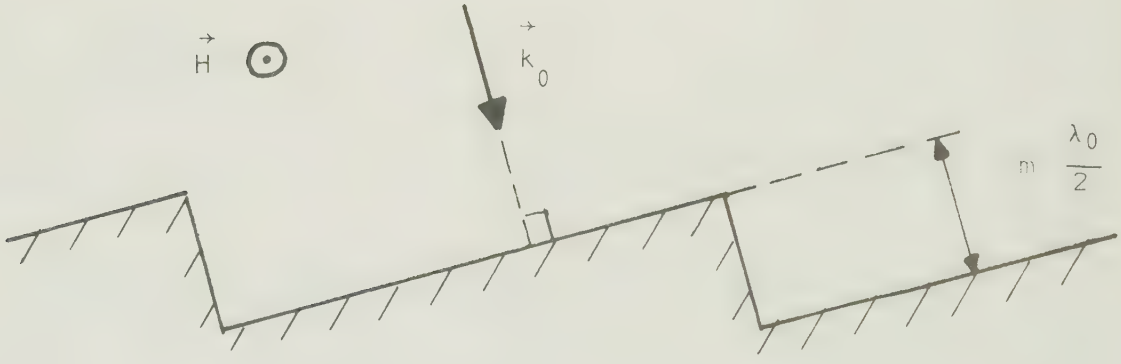


Figure 7

THEOREME :

Dans le cas fondamental H // , lorsqu'un réseau échelette (figure 7) est éclairé perpendiculairement à sa grande facette et si la distance de deux grandes facettes consécutives est égale à un nombre entier m de demi longueur d'onde, toute la lumière diffractée se trouve dans l'ordre - m . L'efficacité ρ_{-m} est égale à 1 , toutes les autres efficacités sont nulles.

Ce théorème met en évidence un cas curieux où le problème de diffraction défini par (39, I), (40, I) et (41, I) possède une solution évidente. Nous voulons ici démontrer qu'il constitue un cas particulier particulièrement simple d'une propriété plus générale qui revêt pour l'instant un intérêt purement théorique, mais d'où on pourra peut être tirer des conséquences pratiques.

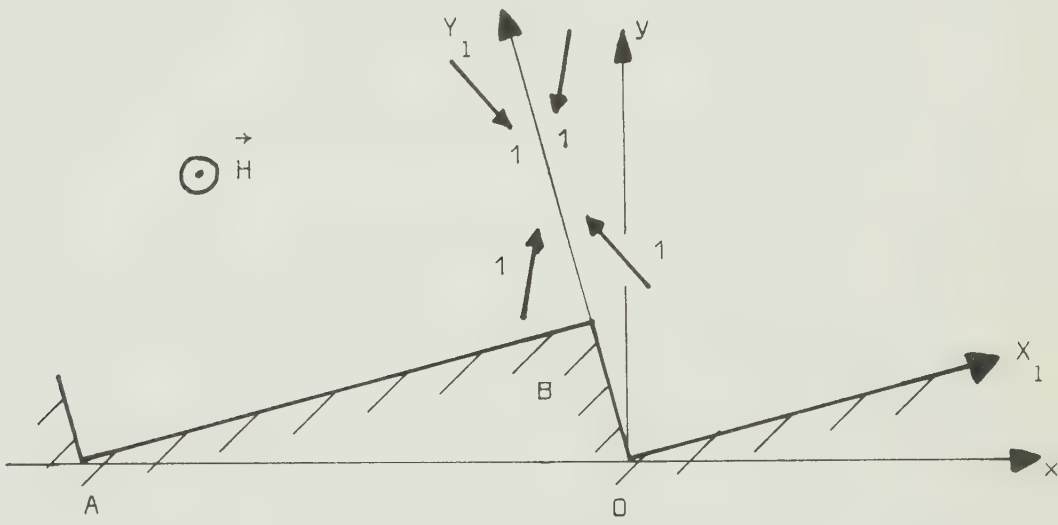


Figure 8

Considérons le réseau échelette représenté sur la figure 8 dont les côtés OB et AB ont des longueurs a et b , et soient OX_1 et OY_1 des axes de coordonnées liés aux côtés.

Soit l'ensemble des fonctions $H_{p,q}$ (p et q entiers positifs) telles que :

$$(50)\quad H_{p,q}(X_1, Y_1) = \exp\left(i(\eta_p X_1 + \chi_q Y_1)\right) + \exp\left(i(\eta_p X_1 - \chi_q Y_1)\right) + \exp\left(i(-\eta_p X_1 + \chi_q Y_1)\right) + \exp\left(i(-\eta_p X_1 - \chi_q Y_1)\right) ,$$

avec $\eta_p = p \cdot \pi/a$,

$\chi_q = q \cdot \pi/b$.

Par arrangement du second membre de (50, I), il vient :

$$H_{p,q}(X_1 , Y_1) = 4 \cos(\eta_p X_1) \cos(\chi_q Y_1) ,$$

et on en déduit que $H_{p,q} \vec{e}_3$ vérifie (4, I), (6', I) (7', I) et (8, I) avec $k_0^2 = \eta_p^2 + \chi_q^2$.

Il faut remarquer dans (50, I) que les vecteurs d'onde peuvent se déduire l'un de l'autre par des symétries d'axes OX_1 et OY_1 , ils sont donc opposés deux à deux (figure 8) ; par suite, deux de ces ondes peuvent être qualifiées d'incidentes. Si on imagine le réseau éclairé par un champ magnétique parallèle à Oz et représenté par deux ondes incidentes, on en déduit grâce à l'unicité de la solution que le champ diffracté correspondant se compose des deux autres ondes planes écrites dans (50, I). On peut remarquer qu'en posant $p = 0$ ou $q = 0$, on retrouve le théorème énoncé par A. Maréchal et G. W. Stroke.

Ces calculs se transposent au cas E // en changeant de signe simultanément l'amplitude d'une des ondes incidentes et l'amplitude de l'onde diffractée se propageant en sens inverse, on définit alors :

$$(51)\quad E_{p,q}(X_1, Y_1) = \exp\left(i(\eta_p X_1 + \chi_q Y_1)\right) - \exp\left(i(\eta_p X_1 - \chi_q Y_1)\right) - \exp\left(i(-\eta_p X_1 + \chi_q Y_1)\right) + \exp\left(i(-\eta_p X_1 - \chi_q Y_1)\right) .$$

Les calculs que nous venons de faire en "diffraction classique" se généralisent en multipliant par $\exp\{i\tau Z\}$ les expressions figurant dans les seconds membres de (50, I) et (51, I), $H_{p,q}$ (resp. $E_{p,q}$) étant cette fois la projection sur Oz du champ électrique (resp. magnétique) total.

Nous venons donc de montrer que dans certains cas, le développement de Rayleigh est valable partout (même à l'intérieur des sillons). On remarque aussi que parfois, la simplicité du profil $\mathcal{P}$ permet de trouver des solutions évidentes à un problème de réseau.

5 - 4. DIFFRACTION PAR UN RESEAU LAMELLAIRE INFINIMENT CONDUCTEUR

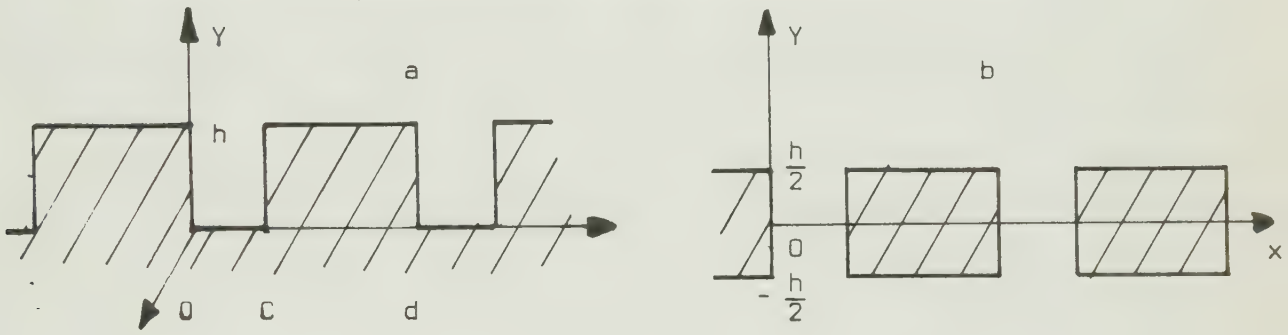


Figure 9 - On peut considérer que le réseau est formé de lamelles à sections rectangulaires régulièrement disposées suivant Ox dans le vide (b) ou sur un plan (a).

Dans cette étude, le profil d'un réseau lamellaire est décrit par l'une ou l'autre des figures 9a et 9b. Ce type de réseau a été très étudié par A. Wirgin [4, 15] . Le formalisme, différent de celui de A. Wirgin, que nous proposons, repose sur des mathématiques élémentaires.

Contrairement aux autres parties de ce chapitre, la théorie que nous exposons ici débouche sur un calcul numérique, mais celui-ci est très simple. Le réseau lamellaire est à nos yeux un cas exemplaire où la forme simple du profil permet l'élaboration de théories spécifiques qui aboutissent naturellement à des temps de calcul plus faibles que les théories générales. D'après le théorème d'invariance du (5. 1., I), on peut se contenter d'étudier les deux cas fondamentaux et, dans un but de simplicité, nous exposons la théorie en E // et pour le profil de la figure 9a.

Si $Y > h$, $E(X, Y)$ peut être représenté par un développement de Rayleigh :

$$(52) \qquad E(X, Y) = \exp\left\langle ik_0(\alpha X - \beta Y)\right\rangle + \sum_m^{\infty} B_m \exp\left\langle ik_0(\alpha_m X + \beta_m Y)\right\rangle \quad .$$

Compte tenu des caractéristiques géométriques du profil, il est possible de trouver une forme simple à $E(X, Y)$ pour $0 < Y < h$. En effet, si $0 < Y < h$, $E(X, Y)$ qui s'annule pour $X = 0$ et $X = c$ peut, pour $0 < X < c$, être représenté par une série de sinus :

$$E(X, Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(Y) \sin(m \cdot \pi \cdot X/c) \quad .$$

En reportant cette série dans l'équation de Helmholtz, on montre que nécessairement :

$$\varphi_m(Y) = f_m \sin(\chi_m Y) + g_m \cos(\chi_m Y) \quad ,$$

avec $\chi_m^2 = k_0^2 - m^2\pi^2/c^2$; χ_m ou χ_m/i positif .

La condition aux limites ($E = 0$ sur OC) impose $g_m = 0$.
Puisque E est nul dans le métal, nous obtenons finalement que, si $0 \leq Y \leq h$, la fonction périodique $E(X, Y)$ est donnée sur l'intervalle période $(0, d)$ par :

$$(53) \qquad E(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin(\chi_m Y) \sin(m \pi X/c) \quad \text{si} \quad 0 \leq X \leq c ,$$

$$= 0 \qquad \text{si} \quad c \leq X \leq d .$$

Ainsi, la détermination de E (nul pour $Y < 0$) se ramène à celle de deux suites dénombrables de coefficients B_m^{∞} et f_m que l'on peut espérer déterminer par un raccordement pour $Y = h$. Ce raccordement peut s'effectuer en identifiant (pour $Y = h$) les coefficients de Fourier de fonctions périodiques continues judicieusement choisies.

La continuité de E fournit tout d'abord, en tenant compte de (52, I) et (53, I) :

$$(54) \qquad B_p^{\infty} \exp(ik_0\beta_p h) + \delta_{p,0} \exp(-ik_0\beta h) =$$

$$d^{-1} \int_0^c \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin(\chi_m h) \sin(m \pi \chi/c) \right) \exp(-ik_0\alpha_p X)\, dx =$$

$$\sum_m V_{pm} f_m .$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$(54') \qquad \mathbf{B} + \mathbf{Vf} = \mathbf{S} ,$$

équation dans laquelle $\mathbf{B}$ et $\mathbf{f}$ sont des matrices colonnes inconnues (d'éléments respectifs B_m^{∞} et f_m), $\mathbf{S}$ une matrice colonne connue $\left(S_m = -\delta_{m,0} \exp(-2ik_0\beta h)\right)$ et $\mathbf{V}$ la matrice carrée connue dont les éléments $V_{p,m}$ ont une expression analytique simple :

$$V_{p,m} = -d^{-1} \exp(-ik_0\beta_p h) \sin(\chi_m h) \int_0^c \sin(m\pi X/c) \exp(-ik_0\alpha_p X)\, dx$$

$$= -d^{-1} \exp(-ik_0\beta_p h) \sin(\chi_m h)\, I_{pm} \quad ,$$

$$I_{pm} = \frac{m\pi c}{k_0^2 \alpha_p^2 c^2 - m^2\pi^2} \left((-1)^m \exp(-ik_0\alpha_p c) - 1 \right)$$

si $k_0 \alpha_p^2 c^2 \neq m^2 \pi^2$

$$I_{pm} = \pm c/2i \qquad \text{si} \quad k_0\alpha_p = \pm m\pi/c.$$

On peut obtenir une deuxième équation linéaire entre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{f}$, en traduisant la continuité pour $Y = h$ de $\partial F(X, Y)/\partial Y$ où $F(X, Y)$ est la fonction deux fois dérivable par rapport à Y définie comme suit :

$$F(X, Y) = E(X, Y) \exp(-ik_0\alpha X) \qquad \text{si} \quad 0 < X < c \quad ,$$

$$= 0 \qquad \text{si} \quad c < X < d \quad ,$$

et dont on désigne par $F_p(Y)$ les coefficients de Fourier. Puisque cette fonction s'identifie à $E(x, y) \exp(-ik_0\alpha X)$ lorsque Y est inférieur à h, on a alors :

$$(55) \qquad F_p(Y) = \sum_{m=1}^{\infty} d^{-1} \sin(\chi_p Y) I_{pm} f_m \quad , \quad \partial F_p/\partial y = \sum_{m=1}^{\infty} d^{-1} \chi_p \cos(\chi_p Y) I_{pm} F_m.$$

Il reste à trouver $F_p(Y)$ lorsque $Y > h$. On y parvient en introduisant la fonction périodique $\mathcal{C}(X)$ définie sur l'intervalle période (0, d) par :

$$\mathcal{C}(X) = 1 \qquad \text{si} \quad 0 < X < c \quad ,$$

$$= 0 \qquad \text{si} \quad c < X < d \quad ,$$

et dont les coefficients de Fourier $\mathcal{C}_p$ sont bien connus :

$$\mathcal{C}_p = (1/2i\pi p)\left\{1 - \exp(-ipKc)\right\} \qquad \text{si} \quad p \neq 0 \quad ,$$

$$= c/d \qquad \text{si} \quad p = 0 \quad .$$

Puisque $F(X, Y) = E(X, Y)\,\mathcal{C}(X)\exp(-ik_0\alpha X)$ et grâce à (52, I) :

$$F_p(Y) = \sum_m \mathcal{C}_{p-m}\left\{B_m^{\infty}\exp(ik_0\beta_m Y) + \delta_{m,0}\exp(-ik_0\beta Y)\right\} \quad .$$

Ainsi, pour $Y > h$:

$$(56) \qquad \partial F_p/\partial Y = \sum_m \mathcal{C}_{p-m}\left\{iB_m^{\infty} k_0\beta_m \exp(ik_0\beta_m Y) - ik_0\beta\,\delta_{m,0}\exp(-ik_0\beta Y)\right\} \quad .$$

La comparaison de (55, I) et (56, I) fournit la relation cherchée :

$$(57) \qquad \sum_m \mathcal{C}_{p-m}\left\{iB_m^{\infty} k_0\beta_m \exp(ik_0\beta_m h) - ik_0\beta\,\delta_{m,0}\exp(-ik_0\beta h)\right\} =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} d^{-1}\,\chi_p\, I_{pm}\cos(\chi_p h)\, f_m \quad ,$$

soit en notation matricielle :

$$(57') \qquad \mathbf{WB} + \mathbf{Zf} = \mathbf{T} \quad ,$$

avec :

$$W_{pm} = ik_0 \beta_m \exp(ik_0 \beta_m h)\, \mathcal{C}_{p-m} \quad , \quad Z_{pm} = -d^{-1} \chi_p \cos(\chi_p h)\, I_{pm} \quad ,$$

$$T_p = ik_0 \beta\, \mathcal{C}_p \exp(-ik_0 \beta h) \quad .$$

De (54', I) et (57', I), on tire :

(58) $\quad \mathbf{f} = (\mathbf{Z} - \mathbf{WV})^{-1} (\mathbf{T} - \mathbf{WS})$,

d'où $\mathbf{B}$ grâce à (54', I) .

On transposera sans peine la méthode au cas du profil 9b. Le champ E est alors donné par :

$$E(X, Y) = \sum_m B_m \exp(ik_0 \alpha_m X + ik_0 \beta_m Y) + \exp(-ik_0 \beta Y) \quad \text{si} \quad Y \geq h/2 \quad ,$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} (g_m \cos(\chi_m Y) \sin(m\pi X/c) + f_m \sin(\chi_m Y) \sin(m\pi X/c))$$

$$\text{si} \quad -h/2 \leq Y \leq h/2 \quad -$$

$$= \sum_m D_m \exp(ik_0 \alpha_m X - ik_0 \beta_m Y) \qquad \text{si} \quad Y \leq h/2 \quad .$$

Il faut donc déterminer quatre suites de coefficients B_m , D_m , g_m , f_m associés à quatre matrices colonnes $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{f}$.

Le raccordement des fonctions continues pour $Y = h/2$ et $Y = h/2$ fournit les quatre équations matricielles nécessaires. Il faut noter qu'un découplage inespéré permet de déterminer séparément g et f par inversion de deux matrices. Nous nous préoccuperons par la suite des problèmes liés à l'inversion d'une matrice infinie.

Par opposition au formalisme différentiel des réseaux qui se caractérise par l'obtention finale d'un système d'équations différentielles couplées, on définit le formalisme intégral par l'ensemble des théories menant à la résolution d'une ou plusieurs équations intégrales couplées. Les différents auteurs qui ont contribué à l'élaboration de ce dernier formalisme se sont limités généralement aux réseaux infiniment conducteurs qui, sauf peut être en ultra-violet, semblaient représenter convenablement les réseaux utilisés en optique. Dans ce domaine, nous essayons de présenter un exposé synthétique des travaux réalisés. Pour cela, la théorie des distributions [25, 26] paraît être l'outil mathématique conciliant la rigueur avec la concision. Dans le domaine beaucoup moins étudié des réseaux de conductivité finie, notre travail a consisté en l'élaboration d'une théorie intégrale susceptible de permettre une large exploitation numérique. En effet, deux directions nous semblaient particulièrement intéressantes : dans le visible, nous voulions contrôler la légitimité de l'assimilation aluminium - métal infiniment conducteur ; dans l'ultra-violet, nous voulions répondre aux questions des spécialistes d'Optique Spatiale qui travaillent aujourd'hui jusqu'à des longueurs d'onde de l'ordre de 100 Å. Toutes les définitions, ainsi que les démonstrations fastidieuses, concernant la théorie des distributions, ont été portées dans l'annexe A 1.

1) THEORIES INTEGRALES DU RESEAU INFINIMENT CONDUCTEUR

D'après (47, I), il nous suffit de résoudre les deux cas fondamentaux pour connaître la solution d'un problème quelconque de "diffraction conique".

CHAPITRE II

LE FORMALISME INTEGRAL DE LA DIFFRACTION PAR UN RESEAU

1. 1 - LE PREMIER CAS FONDAMENTAL : E //

Nous cherchons la solution du problème défini par (36, I), (37, I) et (38, I).

Soit $v(P)$ la fonction égale à $E^d(P)$ si $P \in \mathcal{V}$ et à $-E^i(P)$ si $P \in \mathcal{M}$. C'est une fonction continue qui satisfait une condition d'ondes sortantes pour $Y \to \pm \infty$. Par contre, rien ne permet d'affirmer la continuité de la dérivée normale de v sur $\mathcal{P}$, on peut donc, d'après (11, A 1), écrire au sens des distributions de $\mathcal{R}'$:

$$\Delta v + k_0^2 v = \phi \, \delta_{\mathcal{P}} \quad ,$$

où la fonction ϕ est le saut de la dérivée normale de la fonction $v(P)$ en franchissant $\mathcal{P}$ dans le sens de $\vec{n}$. Les équations de Maxwell et les conditions de passage associées permettent de relier ϕ au courant superficiel $J_s \, \vec{e}_3$. On trouve que $\phi = -i\omega\mu_0 J_s$ et ceci est le point de départ de la formulation proposée par J. Pavageau [5]. Ainsi, en prolongeant naturellement le champ diffracté par l'opposé du champ incident (ce qui revient à prolonger le champ total par 0), nous nous ramenons à la détermination d'une fonction $v(x, y)$ vérifiant :

(1) $\quad \Delta v + k_0^2 v = \phi \, \delta_{\mathcal{P}}$

(2) $\quad \forall M \in \mathcal{P}, \quad v(M) = -E^i(M)$,

(3) $\quad$ Une condition d'ondes sortantes pour $Y \to \pm \infty$.

Nous avons montré dans le I. 3 la "pseudo périodicité" de $v(x, y)$ qui est donc, d'après (2, A 1), un élément de l'espace $\mathcal{R}'$. Par suite, si on trouve G_0 appartenant à $\mathcal{R}'$, vérifiant (3, II) et solution de :

(4) $\quad \Delta G_0 + k_0^2 G_0 = \delta$,

on pourra exprimer v en fonction de ϕ par le produit de convolution $G_0 * \phi \, \delta_{\mathcal{P}}$ qui vérifie (1, II) et (2, II) puisque (17, A 1) permet d'écrire :

$$\Delta\left[G_0 * \phi \, \delta_{\mathcal{P}}\right] + k_0^2\left[G_0 * \phi \, \delta_{\mathcal{P}}\right] = (\Delta G_0 + k_0^2 G_0) * \phi \, \delta_{\mathcal{P}}$$

$$= \delta * \phi \, \delta_{\mathcal{P}} = \phi \, \delta_{\mathcal{P}} \quad .$$

Autrement dit, G_0 et ϕ étant supposées connues, la fonction v, qui s'identifie à E^d au dessus du réseau, est donnée d'après (20, A 1) par :

$$v = (G_0{}^c * \hat{\phi}\, \delta_{\mathcal{P}}) \exp(ik_0 X \sin\theta) .$$

$$(5) \qquad v(P) = \exp(ik_0 X \sin\theta) \int G_0{}^c(X - x', Y - y')\, \hat{\phi}(M')\, ds' ,$$

avec $\hat{\phi}(M) = \phi(M) \exp(- ik_0 x \sin\theta)$, $G_0{}^c(x, y)$ étant naturellement associé à $G_0(X, Y)$ dans l'isomorphisme défini dans l'annexe A 1 entre $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'^c$.

DETERMINATION DE G_0, SOLUTION ELEMENTAIRE DE L'EQUATION DE HELMHOLTZ

G_0 appartenant à $\mathcal{R}'$, il est possible de la développer en "série de Fourier". Pour la clarté du calcul, nous supposerons qu'il s'agit d'une fonction $G_0(X, Y)$ et vérifierons à la fin le bien fondé de cette hypothèse :

$$G_0(X, Y) = \sum_m g_m(Y) \exp(ik_0\alpha_m X) .$$

Nous pouvons écrire de la même façon :

$$\delta = \frac{\delta(Y)}{d} \exp(ik_0\alpha_m X) .$$

En reportant ces deux développements dans les deux membres de (4, II) et en identifiant les coefficients de Fourier, on est conduit à :

$$\frac{d^2 g_m}{dY^2} + k_0{}^2(1 - \alpha_m{}^2)\, g_m = \frac{1}{d}\, \delta(Y) .$$

Ceci montre que $g_m(Y)$ est une fonction continue dont la dérivée présente un saut égal à $\frac{1}{d}$ pour $Y = 0$. Comme d'autre part $G_0(X, Y)$ doit satisfaire une condition d'ondes sortantes pour $Y \to \pm \infty$, on trouve [20] :

$$g_m(Y) = \frac{1}{2\, i d k_0\, \beta_m} \exp(i k_0\, \beta_m\, |Y|) .$$

Nous pouvons donc écrire un résultat fondamental pour tous les problèmes de diffraction par un réseau :

$$(6) \qquad \boxed{G_0(X, Y) = \frac{1}{2\, i d k_0} \sum_m \frac{1}{\beta_m} \exp\left(i k_0 (\beta_m |Y| + \alpha_m X) \right).}$$

soit :

$$(6') \qquad G_0^c(X, Y) = \frac{1}{2\, i d k_0} \sum_m \frac{1}{\beta_m} \exp\,(i k_0\, \beta_m\, |Y| + i m K X) .$$

DETERMINATION DE ϕ

G_0 étant connue, ϕ, fonction périodique, peut être déterminée en portant dans l'équation (2, II) l'expression de v donnée par (5, II) et, après multiplication par $\exp(- i k_0 x \sin\theta)$, on obtient :

$$(7) \qquad \int \hat{\phi}\,(s')\, G_0^c(x - x' , y - y')\, ds' = - \exp(- i k_0\, y \cos\theta) ,$$

il s'agit d'une équation intégrale de Fredholm et de première espèce qui doit être vérifiée pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$, $M'(x', y')$ étant un point courant d'intégration.

Nous posons désormais :

$$(8) \qquad \mathcal{G}_0(M, M') = - G_0^c(x - x' , y - y') .$$

Par souci de simplicité, nous désignons par $\mathcal{A}$ l'opérateur linéaire associé à la fonction $\mathcal{A}(M, M')$ et qui, à toute fonction $p(M)$ définie sur $\mathcal{S}$, associe la fonction $q(M)$ par l'intégration suivante :

$$q(M) = \int \mathcal{A}(M, M')\, p(M')\, ds' \quad ,$$

si bien que (7, II) peut s'écrire :

$$(7') \qquad \boxed{\mathcal{G}_0 \hat{\phi} = w} \quad ,$$

où

$$(9) \qquad w(M) = \exp(- ik_0 y \cos\theta)$$

$$(10) \qquad \mathcal{G}_0(M, M') = \frac{- 1}{2 idk_0} \sum_m \frac{1}{\beta_m} L_m$$

$$(11) \qquad L_m(M, M') = \exp(ik_0 \beta_m |y - y'| + im K(x - x')) .$$

Nous montrerons au chapitre III que $\mathcal{G}_0(M, M')$ est singulier mais intégrable. Une autre façon de procéder, utilisée par J. Pavageau [5] , et reprenant pour un problème à deux dimensions les idées de A. W. Maue [27] , consiste à écrire en un point M de $\mathcal{S}$ la relation liant J_s au champ magnétique :

$$\vec{n}(M) \wedge \left[\vec{\mathcal{H}}(M)\right]_0 = J_s(M)\, \vec{e}_3 \quad .$$

En utilisant les équations de Maxwell et en posant $v_t = v + E^i$, on arrive à la relation scalaire :

$$(12) \qquad \left[\frac{dv_t}{dn}(M)\right]_0 = - i\omega\mu_0 J_s(M) \quad .$$

En explicitant v_t compte tenu de (5, II) et (6, II), et en permutant les signes $\int$ et $\sum$, il apparaît que l'expression figurant au premier membre de (12, II), obtenue en faisant tendre vers M un point P appartenant à Γ_0 (figure 2), est la limite à droite (dans le vide) d'un développement sur la base des $\exp(ik_0 \alpha_n X)$, à condition que Γ_0 et Γ_1 soient parallèles à Ox (figure 10).

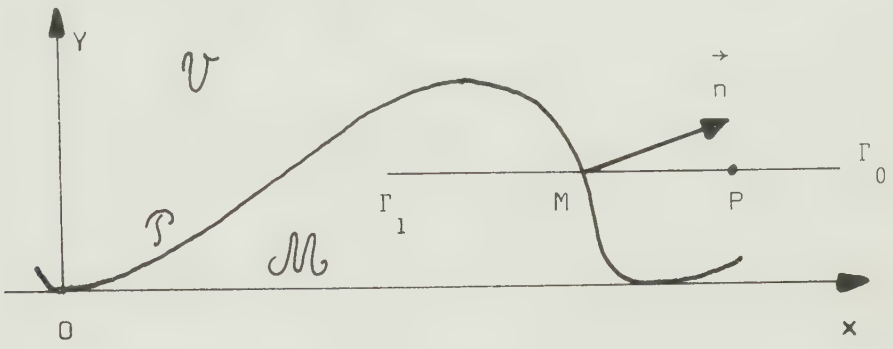


Figure 10

Mais il s'agit du développement d'une fonction a priori discontinue, de sorte que la valeur prise par ce développement au point P est égale à la demi somme de sa valeur à droite et de sa valeur à gauche [26]. Sa valeur dans le métal $\mathcal{M}$ (à gauche de P sur la figure 10) est nulle puisque v_t, égal au champ total, est nul partout, on peut par suite écrire :

$$(13) \qquad \frac{1}{2}\left(0 + \left[\frac{dv_t}{dn}(M)\right]_0\right) = \vec{n}(M)\ \vec{\text{grad}}\ v_t(M) \quad ,$$

sous réserve de l'existence de l'intégrale qui apparait au second membre, compte tenu de (5, II).

En comparant (12, II) et (13, II), il vient :

$$-\frac{i}{2}\omega\mu_0\ J_s(M) = \vec{n}(M)\ .\ \vec{\text{grad}}\ v_t(M) \quad ,$$

et si l'on pose

$$p(M) = 2\,ik_0\,(n_y \cos\theta - n_x \sin\theta)\exp(-ik_0\,y\cos\theta) \quad , \tag{14}$$

on obtient ainsi une équation intégrale de Fredholm et de deuxième espèce :

$$\boxed{p = -\hat{\phi} + \mathcal{N}_0\,\hat{\phi}} \quad , \tag{15}$$

$$\text{avec } \mathcal{N}_0(M, M') = \frac{1}{d}\sum \left(n_y(M)\,\mathrm{sgn}(y - y') + \frac{\alpha_m}{\beta_m}\,n_x(M)\right) L_m \quad , \tag{16}$$

L_m étant donné par (11, II).

Nous verrons au chapitre III ce que l'on peut dire des singularités et de l'intégrabilité de ce noyau, en nous aidant des études de J. Pavageau [5].

FORME DU CHAMP, DETERMINATION DES EFFICACITES

La forme du champ diffracté, donnée pour $P \in \mathcal{V}$ par (5, II), prend une forme simple si $Y > h$. Dans cette région, en effet, le symbôle valeur absolue qui figure dans $G_0(X - x', Y - y')$ peut être supprimé puisque $|Y - y'| = Y - y'$.

Après calcul, (5, II) devient :

$$E^d(P) = \sum_m B_m^{\infty} \exp\left(ik_0\,(\alpha_m X + \beta_m Y)\right) \quad ,$$

$$\boxed{B_m^{\infty} = \frac{1}{2\,idk_0\beta_m}\int \exp(-imKx' - ik_0\beta_m y')\,\hat{\phi}(s')\,ds'} \quad . \tag{17}$$

La théorie intégrale nous permet donc de retrouver le résultat du chapitre I : le développement en ondes planes n'est pas valable pour tout point de $\mathcal{V}$. Les coefficients B_m^{∞} qui intéressent l'opticien se calculent aisément après connaissance de $\hat{\phi}$ donnée par (7', II) ou (15, II).

1. 2 - LE SECOND CAS FONDAMENTAL : H //

Il est défini mathématiquement par (39, I), (40, I) et (41, I). Par analogie avec le calcul précédent, nous définissons $v(P)$ par la fonction égale à $E^d(P)$ si $P \in \mathcal{V}$ et $- E^i(P)$ si $P \in \mathcal{M}$. Cette fonction est a priori discontinue, mais cette fois, sa dérivée normale est continue à la traversée de $\mathcal{P}$. D'après (11, A 1), on peut donc écrire, au sens des distributions de $\mathcal{R}'$:

$$\Delta v + k_0^2 v = \operatorname{div}(\vec{n}\ \psi\ \delta_{\mathcal{P}}) \quad .$$

La fonction ψ qui représente le saut de v ou du champ total $v_t = v + H^i$ s'identifie au courant superficiel J_s porté dans ce cas par la tangente à $\mathcal{P}$ ($\vec{J}_s = J_s \cdot \vec{t}$). En résumé, v vérifie :

(1') $\quad \Delta v + k_0^2 v = \operatorname{div}(\vec{n}\ \psi\ \delta_{\mathcal{P}})$,

(2') $\quad \forall M \in \mathcal{P}$, $\left[v_t(M)\right]_0 = \psi(M) = J_s(M)$,

(3') $\quad$ une condition d'ondes sortantes pour $Y \to \pm \infty$.

La relation (1', II) permet de représenter v par un produit de convolution :

$$v = G_0 \ast \operatorname{div}(\vec{n}\ \psi\ \delta_{\mathcal{P}}) \ ,$$

(5') $$= \left(G_0{}^c \ast \left(\operatorname{div}(\vec{n}\ \psi\ \delta_{\mathcal{P}})\right)^c \right) \cdot \exp(ik_0 X \sin\theta) \ ,$$

où $\left(\mathrm{div}(\vec{n}\ \psi\ \delta_{\mathcal{F}})\right)^{c}$ est la distribution de $\mathcal{R}'^{c}$ associée à $\mathrm{div}(\vec{n}\ \psi\ \delta_{\mathcal{F}})$, c'est-à-dire d'après (7, A 1) :

$$\mathrm{div}(\vec{n}\ \hat{\psi}\ \delta_{\mathcal{F}}) + ik_0 \sin(\theta) n_x\ \hat{\psi}\ \delta_{\mathcal{F}} \quad ,$$

avec $\hat{\psi} = \psi \exp(-ik_0 \times \sin\theta)$.

En explicitant, on obtient $v(P)$ et par conséquent $v_t(P)$ sous la forme d'un développement sur la base des $\exp(ik_0\ \alpha_m\ X)$. Par suite les arguments invoqués au II. 1 pour établir (13, II) permettent ici d'écrire :

$$(13') \qquad \frac{1}{2}\left(0 + \left[v_t(M)\right]_0\right) = v_t(M) \quad .$$

En tenant compte de (2', II), on en déduit :

$$\frac{1}{2}\psi(M) = v(M) + H^i(M) \quad .$$

Tous calculs étant faits, on obtient l'équation intégrale de seconde espèce :

$$(15') \qquad \boxed{2w = \hat{\psi} + \eta_0'\ \hat{\psi}} \quad ,$$

$$(16') \qquad \eta_0'(M, M') = \frac{1}{d} \sum_m \left(n_y(M')\ \mathrm{sgn}(y - y') + \frac{\alpha_m}{\beta_m} n_x(M')\right) L_m \quad ,$$

les expressions de w et L_m étant données par (9, II) et (11, II).

Le noyau $\eta_0'(M, M')$, qui ressemble beaucoup à $\eta_0(M, M')$ donné par (16, II), est étudié au chapitre III. Après développement, (5', II) nous permet de connaître la forme du champ dans $\mathcal{V}$. Si les conclusions concernant

la validité du développement du champ en ondes planes ne sont pas modifiées, les amplitudes des ondes planes diffractées sont données cette fois par :

$$(17') \qquad \boxed{C_m^{\infty} = \frac{1}{2d} \int \left(n_y + \frac{\alpha_m}{\beta_m} n_x\right) \exp(- imKx' - ik_0 \beta_m y') \hat{\psi}(s') \, ds' \quad .}$$

Les équations intégrales que nous venons de décrire ne constituent pas un catalogue complet, d'autres auteurs ont pu utiliser des fonctions v(P) qui n'étaient pas égales à l'opposé du champ incident dans $\mathcal{M}$ [10, 28] . Les équations intégrales obtenues ressemblent alors beaucoup à celles que nous venons de décrire, puisque généralement les noyaux qui y figurent sont égaux à n_0 ou n_0' .

2) THEORIE INTEGRALE DU RESEAU DE CONDUCTIVITE FINIE EMPLOYE DANS DES CONDITIONS "CLASSIQUES".

Le problème de la diffraction par un réseau de conductivité finie ou le problème formellement semblable de la diffraction par un obstacle cylindrique de conductivité finie a été abordé par de nombreux auteurs : la plupart d'entre eux se sont intéressés à des profils de formes géométriques simples et ont utilisé des méthodes analytiques ou variationnelles. Dans le cas où la longueur d'onde n'est pas très petite devant les dimensions de l'objet ou du pas du réseau, des méthodes générales ont été proposées [6, 7, 9, 29, 30, 31, 32].

Les méthodes différentielles, qui se sont limitées à la diffraction classique, n'ont pas encore donné pleinement satisfaction, en particulier dans le cas des fortes conductivités et pour la polarisation H // ; elles sont toutefois en rapide progrès. Les méthodes de type intégral proposent généralement la résolution de deux équations intégrales couplées mais rigoureuses ou une seule équation, mais établie au prix d'approximations. La méthode rigoureuse que nous allons décrire aboutit à la résolution d'une seule équation intégrale de type Fredholm.

Par la suite, A. Wirgin a proposé un autre formalisme aboutissant aussi à la résolution d'une équation intégrale de type Fredholm [33] . Pour la simplicité de l'exposition et en raison de l'importance fondamentale de ce cas particulier, nous exposons d'abord notre théorie dans un cas de diffraction classique et nous la généralisons par la suite à la diffraction conique. En effet, le théorème d'invariance énoncé au I. 5-1. ne se transpose pas aux réseaux de conductivité finie. Nous donnons la théorie du cas E// et nous verrons après cela que la solution du cas H// s'en déduit au prix d'une très légère modification.

2. 1 - MISE EN EQUATION

Après avoir noté par E, E^i et E^d les projections sur Oz des champs électriques total, incident et diffracté (ce dernier étant défini seulement pour $P \in \mathcal{V}$), les équations (4, I) et (5, I) deviennent :

(18) $\quad VP \in \mathcal{V} : \quad \Delta E^d(P) + k_0^2 E^d(P) = 0$

(19) $\quad VP \in \mathcal{M} : \quad \Delta E(P) + k_1^2 E(P) = 0 \quad .$

De (6, I) et des équations de Maxwell, on déduit :

(20) $\quad E$ est continu à la traversée de $\mathcal{S}$,

(21) $\quad \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{dE}{dn} (M) \right]_0 = \frac{1}{\mu_1} \left[\frac{dE}{dn} (M) \right]_1 \quad .$

(8, I) et (9, I) fournissent les conditions à l'infini :

(22) $\quad E^d$ vérifie une condition d'ondes sortantes quand $Y \to + \infty$,

de même pour E quand $Y \to - \infty$.

2. 2 - IMPORTANCE CAPITALE DU CHOIX D'UNE FONCTION INCONNUE

Le problème défini par les conditions (18) à (22) admet une solution unique. Le premier travail consiste à décrire le champ en tout point de l'espace à l'aide de fonctions inconnues définies sur $\mathcal{S}$, de telle manière que, au moins, (18, II), (19, II) et (22, II) soient vérifiées, les autres conditions permettant ensuite de déterminer ces fonctions et donc, finalement, calculer le champ en tout point. Précédemment, dans le cas du métal infiniment conducteur, l'intuition physique et la commodité mathématique nous suggéraient de décrire le champ à l'aide de la fonction $J_S(M)$, courant superficiel sur $\mathcal{S}$. Plus rien de semblable n'existe maintenant, ainsi nous sommes obligés d'opérer un choix. Le champ étant continu à la traversée de $\mathcal{S}$, la première idée qui vient à l'esprit est d'adopter comme fonction inconnue la valeur du champ $E(M)$ sur $\mathcal{S}$, malheureusement, on constate que cette donnée ne suffit pas pour décrire le champ partout et qu'il est nécessaire de connaître aussi la valeur $\left[\frac{dE}{dn}(M)\right]_0$ de la dérivée normale dans le vide. On a donc forcément besoin de deux équations intégrales couplées : elles sont fournies par (20, II) et (21, II) [7, 9]. Ainsi apparait clairement l'importance capitale du choix de la fonction inconnue et on peut donc se demander s'il existe une fonction définie sur $\mathcal{S}$ et dont la connaissance fournit par simples intégrations la valeur du champ en tout point de l'espace. Nous allons montrer qu'il en existe au moins une mais, avant de la définir mathématiquement, il nous semble nécessaire de lui donner une signification physique. Imaginons que tout l'espace soit vide, y compris $\mathcal{M}$ et que l'on puisse imposer sur $\mathcal{S}$ une répartition quelconque de courant surfacique $J(M)\vec{e}_3$ sans support matériel (on pourra imaginer par exemple que l'on dispose sur $\mathcal{S}$ et parallèlement à Oz un grand nombre de fils infinis, conducteurs et très fins (figure 11), le courant dans chacun de ces fils pouvant être choisi arbitrairement. Supposons qu'il existe une répartition $J_d\,\vec{e}_3$ qui puisse créer en tout point de $\mathcal{V}$ le champ diffracté $E^d(P)$ défini par les équations (18, II) à (22, II), le champ créé par $J_d\,\vec{e}_3$ dans $\mathcal{M}$ n'ayant bien entendu aucun rapport avec celui défini par les équations (18, II) à (22, II) (ne serait-ce que parce que $\mathcal{M}$ est maintenant vide). Alors il est bien évident que la connaissance de J_d permettra de décrire le champ diffracté (donc le champ total) dans $\mathcal{V}$ et par conséquent de connaître les valeurs $E(M)$ et $\left[\frac{dE}{dn}(M)\right]_0$ du champ et sa dérivée

normale sur $\mathcal{T}$. Nous savons que cela suffit pour connaître le champ partout et en particulier dans $\mathcal{M}$ grâce aux conditions de passage.

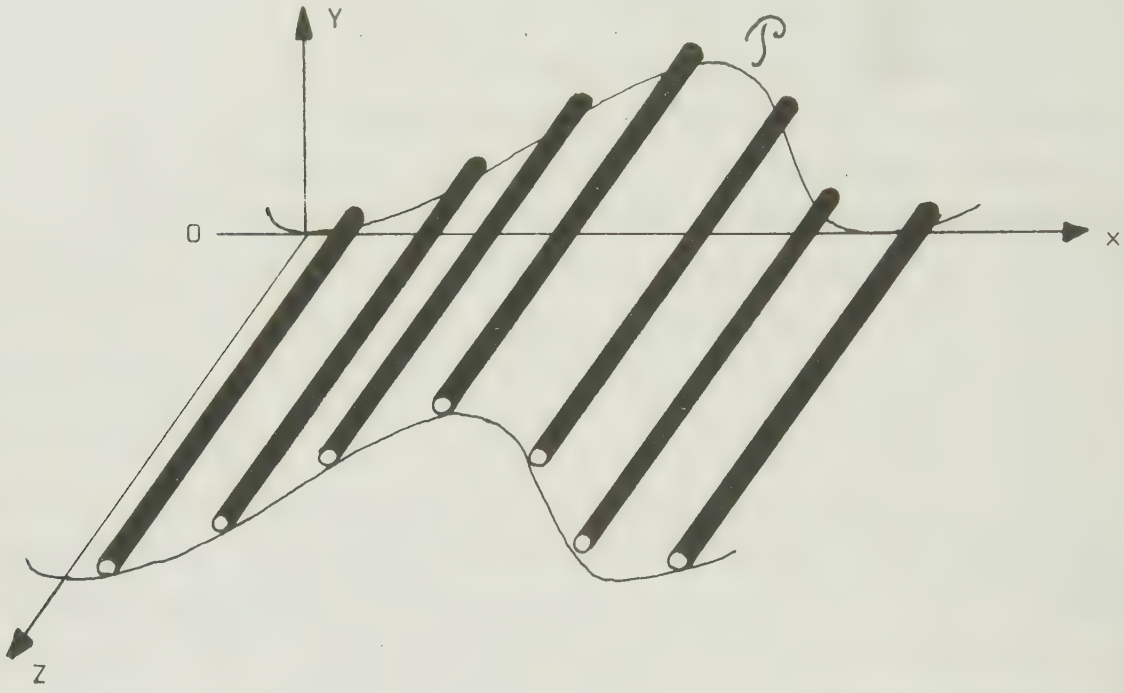


Figure 11 - Chacun des fils est parcouru par un courant imposé.

2. 3 - DEFINITION MATHEMATIQUE DE LA FONCTION INCONNUE

Afin de montrer l'existence et l'unicité de J_d , nous lui donnons maintenant une définition rigoureuse. Considérons la fonction $v(P)$ définie en tout point par :

(23) si $P \in \mathcal{V}$, $v(P) = E^d(P)$,

(24) $v(P)$ est partout continue, y compris à la traversée de $\mathcal{T}$,

(25) si $P \in \mathcal{M}$, $\Delta v(P) + k_0^2 v(P) = 0$.

(26) $v(P)$ vérifie une condition d'ondes sortantes pour $Y \to - \infty$.

Si on admet, pour des raisons physiques, l'existence d'un champ diffracté unique $E^d(P)$ dans $\mathcal{V}$, (24, II) impose la valeur $v(M) = E^d(M)$ de v sur $\mathcal{P}$. Avec (25, II) et (26, II), on dispose donc de conditions permettant d'affirmer l'existence et l'unicité de $v(P)$, y compris dans $\mathcal{M}$ [34]. Comme au II. 1. 1., la fonction $v(P)$ est continue et vérifie une condition d'ondes sortantes quand $Y \to \pm \infty$, mais rien ne nous permet d'affirmer la continuité de sa dérivée normale. L'inconnue du problème est donc naturellement la fonction $\phi_1(M)$ (liée à J_d) égale au saut de la dérivée normale de $v(P)$ lors du franchissement de $\mathcal{P}$ dans le sens de $\vec{n}$:

$$\phi_1(M) = \left[\frac{dv}{dn}(M)\right]_0 - \left[\frac{dv}{dn}(M)\right]_1 . \tag{27}$$

Les fonctions ϕ_1 et $v(X, Y)$ jouissent naturellement de la propriété de "pseudo-périodicité" du champ $E(X, Y)$.

2. 4 - EXPRESSION EN FONCTION DE ϕ_1 DU CHAMP ET DE SA DERIVEE NORMALE SUR $\mathcal{P}$.

En procédant comme au II. 1. 1., c'est-à-dire en écrivant (25, II) au sens des distributions de manière à faire apparaître un second membre fonction de ϕ_1, puis en utilisant les propriétés de G_0 et du produit de convolution dans $\mathcal{R}'$, on obtient pour v une expression strictement semblable à celle figurant dans (5, II) :

$$v(P) = \exp(ik_0 X \sin\theta) \int G_0^c(X - x', Y - y')\, \hat{\phi}_1(M')\, ds' , \tag{28}$$

avec $$\hat{\phi}_1(M) = \phi_1(M) \exp(- ik_0 x \sin\theta) .$$

Si on remarque que l'expression de $v(P)$ ainsi obtenue est continue et égale sur $\mathcal{P}$ au champ diffracté, et si on se souvient de (8, II), on trouve immédiatement :

$$E^d(M) = - \exp(ik_0 x \sin\theta) \int \mathcal{G}_0(M, M')\, \hat{\phi}_1(M')\, ds' . \tag{29}$$

Pour calculer la dérivée normale du champ au-dessus de $\mathcal{P}$, on applique une fois de plus le théorème classique sur les discontinuités des séries de Fourier :

$$(30) \qquad \frac{1}{2}\left(\left[\frac{dv}{dn}(M)\right]_0 + \left[\frac{dv}{dn}(M)\right]_1\right) = \vec{n}(M) \,.\, \vec{\text{grad}}\, v(M) \quad .$$

En éliminant $\left[\frac{dv}{dn}(M)\right]_1$ entre (27, II) et (30, II), puis en remarquant que $\left[\frac{dv}{dn}(M)\right]_0 = \left[\frac{dE^d}{dn}(M)\right]_0$, et enfin en utilisant (16, II), il vient :

$$(31) \qquad \left[\frac{dE^d}{dn}(M)\right]_0 = \frac{1}{2}\,\phi_1(M) + \frac{1}{2}\exp(ik_0 \times \sin\theta) \int \eta_0(M, M')\,\hat{\phi}_1(M')\,ds' \quad .$$

Pour exprimer en fonction de ϕ_1 les valeurs du champ et de sa dérivée normale du côté de $\mathcal{M}$, on ajoute au champ diffracté le champ incident dans (29, II) et (31, II), puis on utilise les conditions de passage (20, II) et (21, II) en se souvenant des notations indiquées par (9, II), (14, II) et (16, II):

$$(29') \qquad E(M) = \exp(ik_0 \times \sin\theta)\, w(M) - \int \mathcal{G}_0 \,(M, M')\,\hat{\phi}_1(M')\,ds' \quad ,$$

$$(31') \qquad \left[\frac{dE}{dn}(M)\right]_1 = \frac{\mu_1}{2\mu_0}\exp(ik_0 \times \sin\theta)\left(-\,p(M) + \hat{\phi}_1(M) + \int \eta_0(M, M')\hat{\phi}_1(M')\,ds\right.$$

2. 5 - RELATION ENTRE CHAMP ET DERIVEE NORMALE SUR $\mathcal{P}$ IMPOSEE PAR LA PRESENCE DU MATERIAU REMPLISSANT $\mathcal{M}$.

En introduisant dans (29, II) et (31, II) une fonction $\hat{\phi}_1$ arbitraire, on obtient des valeurs du champ et de la dérivée normale compatibles avec (18, II) et (22, II); par contre, en portant dans (29', II) et (31', II) une fonction $\hat{\phi}_1$ quelconque, il est bien évident que les valeurs du champ et de la dérivée normale ainsi obtenues seraient généralement incompatibles avec

(19, II) et (22, II), la présence du métal dans $\mathcal{M}$ imposant aussi une relation entre le champ et sa dérivée normale sur $\mathcal{P}$. C'est cette relation que nous allons maintenant écrire. Pour cela, nous définissons la solution élémentaire G_1 de l'équation de Helmholtz dans $\mathcal{M}$, en remplaçant k_0 par k_1 dans (4, II). Les expressions de G_1 , $G_1^{\,c}$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{N}_1'$ correspondantes s'en déduisent en multipliant β_m par r_m dans (6, II), (6', II), (10, II) et (16', II), les L_m donnés par (11, II) étant remplacés par des N_m obtenus par la même transformation :

$$G_1^{\,c}(X, Y) = \frac{1}{2\ i d k_0} \sum_m \frac{1}{r_m \beta_m} \exp(i k_0\ r_m\ \beta_m\ |Y| + imKX) \quad ,$$

$$\mathcal{G}_1(M, M') = \frac{-\ 1}{2\ i d k_0} \sum_m \frac{1}{r_m \beta_m} N_m \quad ,$$

$$\mathcal{N}_1'(M, M') = \frac{1}{d} \sum_m \left((n_y(M')\ \mathrm{sgn}(y - y') + \frac{\alpha_m}{r_m \beta_m}\ n_x(M') \right) N_m ,$$

$$N_m = \exp(i k_0\ r_m\ \beta_m\ |y - y'| + imK(x - x')) \quad .$$

Soit la fonction $v'(P)$ égale à 0 dans $\mathcal{V}$ et au champ total $E(P)$ dans $\mathcal{M}$, elle vérifie au sens des distributions :

$$\Delta v' + k_1^{\,2} v' = - \left[\frac{dE}{dn}\right]_1 \delta_{\mathcal{P}} \quad - \mathrm{div}(\vec{n}\ E\ \delta_{\mathcal{P}}) \quad ,$$

E et $\left[\frac{dE}{dn}\right]_1$ étant les valeurs prises par le champ et sa dérivée normale sur $\mathcal{P}$. Cette équation permet d'exprimer $v'(P)$ en tout point :

$$(32) \quad v'(P) = \int \vec{n}(M') \cdot \underset{M'}{\mathrm{grad}\vec{}} \left(G_1(P, M') \right) . E(M')\ ds' - \int G_1(P, M') \left[\frac{dE}{dn}(M')\right]_1 ds' \ .$$

La relation cherchée s'obtient en écrivant :

$$\left[v'(M)\right]_1 = E(M) \quad ,$$

soit, après une nouvelle utilisation des propriétés des séries de Fourier :

$$(33)\quad \frac{1}{2}\exp(-ik_0 x \sin\theta)\,E(M) = -\frac{1}{2}\int \mathcal{N}'_1(M, M')\exp(-ik_0 x' \sin\theta)E(M')\,ds' + \int \mathcal{G}_1(M, M')\exp(-ik_0 x' \sin\theta)\left[\frac{dE}{dn}(M')\right]_1 ds' \quad .$$

2. 6 - EQUATION INTEGRALE

On l'obtient en portant dans (33) les valeurs du champ et de la dérivée normale donnés par (29', II) et (31', II) :

$$(34)\quad \boxed{s_1 = \mathcal{L}_1\,\hat{\phi}_1\,,}$$

$$(35)\quad s_1 = w + \mathcal{N}'_1\,w + \frac{\mu_1}{\mu_0}\,\mathcal{G}_1\,p \quad ,$$

$$(36)\quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{G}_0 + \frac{\mu_1}{\mu_0}\,\mathcal{G}_1 + \mathcal{N}'_1.\mathcal{G}_0 + \frac{\mu_1}{\mu_0}\,\mathcal{G}_1.\mathcal{N}_0$$

Les expressions du type $\mathcal{N}'_1.\mathcal{G}_0$ désignent le produit classique des deux opérateurs, la fonction à deux variables associée s'écrit :

$$\left[\mathcal{N}'_1.\mathcal{G}_0\right](M, M') = \int \mathcal{N}'_1(M, M'').\mathcal{G}_0(M'', M')\,ds'' \quad .$$

(34, II) est une équation intégrale de Fredholm de première espèce et à noyau singulier ; après résolution, le champ électrique diffracté dans $\mathcal{V}$ (celui qui intéresse l'Opticien) est donné par (29, II), si bien qu'on peut appliquer une formule semblable à (17, II) pour connaître les amplitudes des ondes diffractées :

$$(17')\quad \boxed{B_m = \frac{1}{2\,idk_0\beta_m}\int \exp(-imKx' - ik_0\,\beta_m\,y')\,\hat{\phi}_1(s')\,ds' \quad .}$$

2. 7 - EQUATION INTEGRALE DU CAS H //

En utilisant (4, I), (5, I), (6, I), (8, I), (9, I) et les équations de Maxwell, on montre aisément que les conditions vérifiées par H, composante sur Oz du champ magnétique, sont obtenues en remplaçant E par H dans les équations (18, II) à (22, II), ε_0 et ε_1 prenant respectivement la place de μ_0 et μ_1 dans (21, II). Ceci nous permet d'affirmer que mathématiquement, le problème est strictement semblable à celui que nous venons de résoudre et par conséquent, l'équation (34, II) est conservée, il suffit de remplacer le rapport $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ par $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ dans (35, II) et (36, II). Les amplitudes des ondes diffractées sont données par (17', II) en remplaçant B_m par C_m :

(34') $$\boxed{s_2 = \mathcal{L}_2 \, \hat{\phi}_2 \quad ,}$$

(35') $$s_2 = w + \mathcal{N}'_1 \, w + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \, \mathcal{G}_1 \, p \quad ,$$

(36') $$\mathcal{L}_2 = \mathcal{G}_0 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \, \mathcal{G}_1 + \mathcal{N}'_1 . \mathcal{G}_0 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \, \mathcal{G}_1 . \mathcal{N}_0 ,$$

(17") $$\boxed{C_m = \frac{1}{2 \, i d k_0 \, \beta_m} \int \exp(- imKx' - ik_0 \, \beta_m \, y') \, \hat{\phi}_2 \, (s') \, ds' \quad .}$$

2. 8 - FORME EQUIVALENTE DES FONCTIONS A DEUX VARIABLES

Nous avons exprimé G_0 et G_1 sous forme de sommes d'exponentielles, certains auteurs utilisent parfois une autre expression contenant des fonctions de Hankel. Si G_0 et les fonctions à deux variables associées sont, par la suite, toujours décrites par les expressions que nous avons données, nous verrons au troisième chapitre qu'il est quelquefois très utile d'utiliser l'autre forme pour G_1, de manière à en déduire des définitions de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{N}'_1$ numériquement plus commodes. L'annexe A 2 démontre l'équivalence entre les deux formes possibles de ces opérateurs.

2. 9 - LIMITE DES EQUATIONS QUAND LA CONDUCTIVITE TEND VERS L'INFINI

Nous démontrons au chapitre III, que, lorsque la conductivité (partie imaginaire de ε_1) tend vers l'infini, les fonctions $\mathcal{G}_1(M, M')$ et $\mathcal{N}'_1(M, M')$ tendent vers des "fonctions de Dirac", si bien que :

$$\lim_{|\varepsilon_1| \to \infty} \int \mathcal{G}_1(M, M') \hat{\phi}(M')\, ds' = \frac{C_1(M)}{\nu} \hat{\phi}(M) ,$$

$$\lim_{|\varepsilon_1| \to \infty} \int \mathcal{N}'_1(M, M') \hat{\phi}(M')\, ds' = \frac{C_2(M)}{\nu} \hat{\phi}(M) .$$

$C_1(M)$ et $C_2(M)$ sont des fonctions définies sur $\mathcal{S}$ et liées à la forme du profil, l'indice complexe ν tendant vers l'infini. Il faut remarquer d'autre part que quand la conductivité tend vers l'infini, $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ reste borné, par contre $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ tend vers l'infini en ν^2 . On en déduit élémentairement que l'équation (34, II) prend une forme particulièrement simple si $|\varepsilon_1| \to \infty$:

$$(34'') \qquad w = \mathcal{G}_0 \hat{\phi}_1 .$$

On a reconnu l'équation (7', II) du cas fondamental E // pour un réseau infiniment conducteur.

Pour le cas H //, on étudie la limite de (34', II) :

$$(34'') \qquad p = \hat{\phi}_2 + \mathcal{N}_0 \hat{\phi}_2 .$$

Cette équation intégrale ne figure pas parmi celles que nous avons données pour le réseau infiniment conducteur, il faut toutefois remarquer sa grande ressemblance avec (15, II) équation relative au cas E //, seul le signe placé devant $\hat{\phi}_2$ étant modifié. En fait, l'équation (34'', II) s'obtient pour un réseau infiniment conducteur dans le cas fondamental H // en

prolongeant le champ diffracté défini pour $P \in \mathcal{V}$ par une fonction différente de l'opposé du champ incident [10] .

Ainsi, il est rassurant pour l'esprit de constater que, la conductivité tendant vers l'infini, les équations (34, II) et (34', II) tendent vers des équations intégrales déjà rencontrées pour traiter le cas des réseaux infiniment conducteurs.

3) THEORIE INTEGRALE DU RESEAU DE CONDUCTIVITE FINIE EMPLOYE EN "DIFFRACTION CONIQUE".

La généralisation de la théorie que nous venons d'exposer amène malheureusement de notables complications. Le champ total vérifie les équations (4', I) et (5', I). Nous avons vu précédemment que des composantes sur Oz de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ on peut tirer les autres composantes de ces champs. Nous allons donc essayer de déterminer E_z et H_z qui, bien entendu, vérifient :

$$(37) \qquad \Delta P \in \mathcal{V}, \begin{cases} \Delta E_z(P) + \tilde{k}_0^2 E_z(P) = 0 , \\ \Delta H_z(P) + \tilde{k}_0^2 H_z(P) = 0 , \end{cases}$$

$$(38) \qquad VP \in \mathcal{M}, \begin{cases} \Delta E_z(P) + \tilde{k}_1^2 E_z(P) = 0 , \\ \Delta H_z(P) + \tilde{k}_1^2 H_z(P) = 0 . \end{cases}$$

Après développement et utilisation des équations de Maxwell, (6, I) et (7, I) deviennent :

(39) E_z et H_z sont partout continus,

$$(40) \qquad \left[\frac{dE_z}{dn}(M)\right]_1 = \sigma_1 \left[\frac{dE_z}{dn}(M)\right]_0 + \sigma_2 \frac{dH_z}{dt}(M) \quad ,$$

$$(40') \qquad \left[\frac{dH_z}{dn}(M)\right]_1 = \sigma_3 \left[\frac{dH_z}{dn}(M)\right]_0 + \sigma_4 \frac{dE_z}{dt}(M) \quad ,$$

avec :

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \frac{\nu^2 - \gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad , \qquad \sigma_2 = \gamma \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad ,$$

$$\sigma_3 = \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{\nu^2 - \gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad , \qquad \sigma_4 = \gamma \frac{\mu_0}{\mu_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\nu^2 - 1}{1 - \gamma^2}$$

Les conditions à l'infini s'écrivent

(41) si $Y \to + \infty$, E_z^d et H_z^d vérifient une condition d'ondes sortantes,

(41') si $Y \to - \infty$, E_z et H_z vérifient une condition d'ondes sortantes.

Le problème consiste donc à déterminer les deux fonctions E_z et H_z couplées par (40, II) et (40', II). Ce couplage est responsable de la complication du problème. On peut remarquer en particulier que la nullité de E_z^i (resp. H_z^i) n'entraîne pas forcément celle de E_z^d (resp. H_z^d). Par conséquent, les deux cas fondamentaux $H_\perp$ (resp. $E_\perp$) définis par la nullité de H_z^i (resp. E_z^i) ne seront pas caractérisés aussi par la nullité de H_z^d (resp. E_z^d).

Pour décrire le champ en tout point, nous considérons deux fonctions $v_1(P)$ (resp. $v_2(P)$) définies par les conditions (23, II) à (26, II) après

avoir remplacé $E^d(P)$ par $E_z^d(P)$ (resp. $H_z^d(P)$) et k_0^2 par $\tilde{k}_0^2$.
Les inconnues du problème sont donc deux fonctions $\phi_1(M)$ et $\phi_2(M)$ définies sur $\mathcal{P}$ et "pseudo périodiques" :

$$\phi_1(M) = \left[\frac{dv_1}{dn}(M)\right]_0 - \left[\frac{dv_1}{dn}(M)\right]_1 ,$$

$$\phi_2(M) = \left[\frac{dv_2}{dn}(M)\right]_0 - \left[\frac{dv_2}{dn}(M)\right]_1 .$$

En introduisant $\tilde{G}_0$ obtenu en remplaçant k_0 par $\tilde{k}_0$ dans (4, II), on peut exprimer v_1 et v_2 en tout point de l'espace. Par passage à la limite et utilisation des propriétés des séries de Fourier, on trouve :

$$(42) \qquad E_z^d(M) = -\exp(ik_0 \times \sin\theta) \int \tilde{\mathcal{G}}_0(M, M')\, \hat{\phi}_1(M')\, ds' ,$$

$$(43) \qquad \left[\frac{dE_z^d}{dn}(M)\right]_0 = \frac{1}{2}\hat{\phi}_1(M) + \frac{1}{2}\exp(ik_0 \times \sin\theta) \int \tilde{\mathcal{N}}_0(M, M')\, \hat{\phi}_1(M')\, ds' ,$$

$$(44) \qquad \frac{dE_z^d}{dt}(M) = \exp(ik_0 \times \sin\theta) \int \mathcal{C}(M, M')\, \hat{\phi}_1(M')\, ds' ,$$

$$(45) \qquad \mathcal{C}(M, M') = \frac{1}{d} \sum_m \left(-n_x(M)\, \mathrm{sgn}(y - y') + \frac{\tilde{\alpha}_m}{\tilde{\beta}_m} n_y(M) \right) \tilde{L}_m .$$

Les expressions de $\tilde{L}_m$, $\tilde{\mathcal{G}}_0$, $\tilde{\mathcal{N}}_0$ sont obtenues à partir des expressions de L_m , $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{N}_0$ en remplaçant k_0 par $\tilde{k}_0$, α_m par $\tilde{\alpha}_m$, β_m par $\tilde{\beta}_m$.

Les expressions correspondantes de $H_z^d(M)$, $\left[\frac{dH_z^d}{dn}(M)\right]_0$ et $\frac{dH_z^d}{dt}(M)$ s'obtiennent en remplaçant ϕ_1 par ϕ_2 dans (42, II) à (44, II).

De (42, II) on peut tirer la valeur du champ diffracté (donc total) sur $\mathcal{S}$. En portant dans (40, II) et (40', II) les valeurs des dérivées normales et tangentielles données par (43) et (44), on en déduit $\left[\frac{dE_z}{dn}(M)\right]_1$ et $\left[\frac{dH_z}{dn}(M)\right]_1$ en fonction de $\hat{\phi}_1$ et $\hat{\phi}_2$.

On sait que la présence du réseau impose des relations entre les champs et leur dérivée normale dans $\mathcal{M}$. Ces relations s'obtiennent, comme précédemment, en considérant $v'_1(P)$ (resp. $v'_2(P)$) égales à 0 dans $\mathcal{V}$ et à E_z (resp. H_z) dans $\mathcal{M}$:

$$(46)\quad \frac{1}{2}\exp(-ik_0 x \sin\theta)\, E_z(M) = -\frac{1}{2}\int \tilde{\mathcal{N}}'_1(M, M')\exp(-ik_0 x' \sin\theta) E_z(M')\, ds' + \int \tilde{\mathcal{G}}_1(M, M')\exp(-ik_0 x' \sin\theta)\left[\frac{dE_z}{dn}(M')\right]_1 ds' ,$$

$\tilde{\mathcal{N}}'_1$ et $\tilde{\mathcal{G}}_1$ étant tirés de $\tilde{G}_1$, solution élémentaire de l'équation de Helmholtz où figure $\tilde{k}_1$. L'équation correspondante pour H_z est strictement identique à (46, II).

Il suffit donc de porter dans les deux équations (46, II) les valeurs de E_z, H_z, $\left[\frac{dE_z}{dn}(M)\right]_1$ et $\left[\frac{dH_z}{dn}(M)\right]_1$ trouvées précédemment pour obtenir deux équations intégrales couplées contenant les fonctions inconnues $\hat{\phi}_1$ et $\hat{\phi}_2$.

Nous explicitons ces équations dans les cas $E_\perp$ et $H_\perp$ en posant :

(47) $$q(M) = -2i\,\tilde{k}_0 \cos(\xi)(n_y \sin\theta + n_x \cos\theta) \exp(-i\tilde{k}_0 y \cos\theta) ,$$

$\tilde{w}(M)$ et $\tilde{p}(M)$ sont obtenues en remplaçant k_0 par $\tilde{k}_0$ dans les expressions de $w(M)$ et $q(M)$ puis en les multipliant par $\cos\xi$, amplitude de la composante sur Oz du champ incident :

Cas $H_\perp$:

(48) $$w_1 + \sigma_1 p_1 = \mathcal{L}_1 \hat{\phi}_1 + \sigma_2 \mathcal{L}_3 \hat{\phi}_2 ,$$

(48') $$\sigma_4 q_1 = \mathcal{L}_2 \hat{\phi}_2 + \sigma_4 \mathcal{L}_3 \hat{\phi}_1 ,$$

Cas $E_\perp$:

(49) $$\sigma_2 q_1 = \mathcal{L}_1 \hat{\phi}_1 + \sigma_2 \mathcal{L}_3 \hat{\phi}_2 ,$$

(49') $$w_1 + \sigma_3 p_1 = \mathcal{L}_2 \hat{\phi}_2 + \sigma_4 \mathcal{L}_3 \hat{\phi}_1 ,$$

avec :

(50) $$\mathcal{L}_1 = \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\eta}'_1 . \tilde{\mathcal{G}}_0 + \sigma_1 (\tilde{\mathcal{G}}_1 + \tilde{\mathcal{G}}_1 \tilde{\eta}_0) ,$$

(50') $$\mathcal{L}_2 = \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\eta}'_1 . \tilde{\mathcal{G}}_0 + \sigma_3 (\tilde{\mathcal{G}}_1 + \tilde{\mathcal{G}}_1 \tilde{\eta}_0) ,$$

(50") $$\mathcal{L}_3 = \tilde{\mathcal{G}}_1 \mathcal{C} ,$$

(51) $$w_1 = w + \tilde{\eta}'_1 \tilde{w} ,$$

(51') $$p_1 = \tilde{\mathcal{G}}_1 \tilde{p} ,$$

(51") $$q_1 = \tilde{\mathcal{G}}_1 \tilde{q} .$$

Après résolution, on peut calculer grâce à des formules semblables à (17, II) les amplitudes $B_z m$ et $C_z m$ des champs électriques et magnétiques diffractés :

$$(52) \qquad B_z m = \frac{1}{2idk_0\beta_m} \int \exp\left(-ik_0 \beta_m y' - imKx'\right) \hat{\phi}_1(s')\, ds' \quad ,$$

$$(52') \qquad C_z m = \frac{1}{2idk_0\beta_m} \int \exp\left(-ik_0 \beta_m y' - imKx'\right) \hat{\phi}_2(s')\, ds' \quad .$$

Ainsi, grâce aux équations de Maxwell, on en déduit $B_x m$, $B_y m$, $C_x m$, $C_y m$ et finalement les efficacités dans les différents ordres :

$$(53) \qquad \text{cas } H_\perp : \quad \rho_m = \frac{\tilde{\beta}_m}{\tilde{\beta}(1-\gamma^2)} \left(|B_z m|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} |C_z m|^2 \right) ,$$

$$(53') \qquad \text{cas } E_\perp : \quad \rho_m = \frac{\tilde{\beta}_m}{\tilde{\beta}(1-\gamma^2)} \left(|C_z m|^2 + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} |B_z m|^2 \right) .$$

On peut vérifier qu'en posant $\xi = 0$ dans (48, II) à (49', II), on obtient bien (34, II) ou (34', II) ; de même, si la conductivité du réseau tend vers l'infini, les équations se découplent et on obtient les équations intégrales du réseau infiniment conducteur.

4 - PROBLEME DES ARETES DANS LES EQUATIONS INTEGRALES

Quand le profil $\mathcal{P}$ du réseau présente des arêtes, ce qui est par exemple le cas du réseau échelette, les conditions mathématiques que nous avons imposées aux champs ne suffisent pas pour assurer l'unicité de la solution et il est nécessaire de leur adjoindre par exemple la condition d'intégrabilité de Meixner [12]. En utilisant les équations de Maxwell et

cette nouvelle condition, on peut montrer qu'au voisinage de la pointe, certaines composantes des champs ainsi que la fonction ϕ inconnue peuvent avoir un comportement singulier. Pour le métal infiniment conducteur, le type de singularité se détermine aisément, alors que pour un matériau de conductivité finie, il se déduit de la solution d'une équation transcendante [36].

On peut donc penser que, comme nous n'avons pas tenu compte de cette nouvelle condition, le type de singularité attribué à ϕ par Meixner ne peut se déduire des équations intégrales que nous avons obtenues. Nous allons montrer qu'il n'en est rien et que, pour certaines équations intégrales du moins, l'existence de l'intégrale entraîne pour ϕ le type de singularité prévu par Meixner.

Considérons l'équation (15, II) obtenue pour le cas fondamental E // et pour un métal infiniment conducteur. Nous verrons au chapitre III que lorsque $M' \to M$, le noyau $\mathcal{N}_0(M, M')$ admet une limite :

$$\lim_{M' \to M} \mathcal{N}_0(M, M') = \frac{n_x}{d} \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \frac{ik_0 \sin\theta}{\pi} \frac{n_x(y - y')^2 - n_y(y - y')(x - x')}{|\vec{MM'}|^2}$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{\vec{n} \cdot \vec{MM'}}{|\vec{MM'}|^2} ,$$

et que si $\mathcal{P}$ admet un rayon de courbure non nul en M, cette limite est finie. Si $\mathcal{P}$ comporte une pointe (figure 12), les deux premiers termes de la limite restent finis quelle que soit la position de M et M'. Par contre, si M et M' tendent simultanément vers la pointe en restant de part et d'autre de celle-ci, le dernier terme de la limite peut être rendu aussi grand que l'on veut, le produit scalaire $\vec{n} \cdot \frac{\vec{MM'}}{|\vec{MM'}|}$ ne tendant pas vers 0. Par souci de simplicité, nous prenons comme exemple

la pointe supérieure A d'un réseau échelette, l'origine des abscisses curvilignes étant prise en A (figure 12).

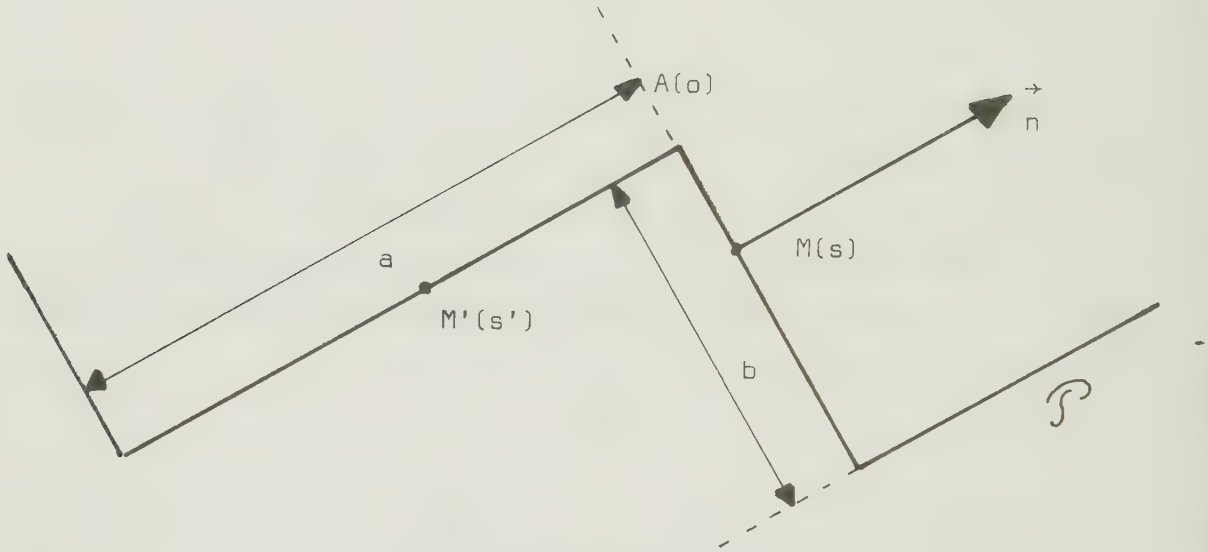


Figure 12

M est placé sur la petite facette de longueur b , et M' sur la grande facette de longueur a . Un calcul élémentaire montre :

$$\vec{n} \cdot \vec{MM'} = s' \quad ,$$

$$|\vec{MM'}|^2 = s^2 + s'^2 \quad .$$

On en tire donc :

$$(53) \qquad \eta_0(M, M') = -\frac{1}{\pi}\frac{s'}{s^2 + s'^2} + \zeta(s, s')$$

où $\zeta(s, s')$ est une fonction bornée. Supposons d'abord que $\hat{\phi}(s)$ tend vers un nombre fini et non nul $\hat{\phi}(0)$ en A et écrivons (15, II) en M :

$$p(M) = - \hat{\phi}(M) + \int \eta_0(M, M') \hat{\phi}(M') \, ds' \quad ,$$

$$(54) \quad p(M) = - \hat{\phi}(M) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{0} \frac{s'}{s^2 + s'^2} \hat{\phi}(s') \, ds' + \int_{-a}^{0} \zeta(s, s') \hat{\phi}(s') \, ds' + \int_{0}^{b} \eta_0(M,M') \hat{\phi}(s') \, ds' \quad .$$

Il faut constater que, d'après nos hypothèses, tous les termes de (54, II) sont bornés, sauf éventuellement un que nous transformons en écrivant :

$$(55) \quad \int_{-a}^{0} \frac{s'}{s^2 + s'^2} \hat{\phi}(s') ds' = \int_{-a}^{0} \frac{s'}{s^2 + s'^2} \hat{\phi}(0) ds' + \int_{-a}^{0} \frac{s'}{s^2 + s'^2} \left(\hat{\phi}(s') - \hat{\phi}(0) \right) ds' \quad .$$

On montre aisément par développement de $\hat{\phi}(s') - \hat{\phi}(0)$ en série de Taylor que le dernier terme de (55, II) reste borné, même si s tend vers 0 ; après avoir posé $u = \frac{s'}{s}$, l'autre terme s'écrit :

$$\int_{-a}^{0} \frac{s'}{s^2 + s'^2} \hat{\phi}(0) ds' = \hat{\phi}(0) \int_{-\frac{a}{s}}^{0} \frac{u}{1 + u^2} du = \frac{\hat{\phi}(0)}{2} \left[\operatorname{Log}(1 + u^2) \right]_{-\frac{a}{s}}^{0}$$

$$= - \frac{\hat{\phi}(0)}{2} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) \quad .$$

Cette intégrale diverge si s tend vers 0 et (15, II) ne peut donc être respectée. Compte tenu de cette contradiction, il reste deux hypothèses : $\hat{\phi}(M) \to 0$ si $M \to A$, ou $\hat{\phi}(M)$ est singulier en A.

Pour examiner la dernière éventualité, écrivons que $\hat{\phi}(M)\, s^{\ell}$ tend vers une constante L_A non nulle en A, ℓ étant compris entre 0 et 1 afin que $\hat{\phi}(M)$ soit intégrable et que (15, II) ait un sens.

En écrivant (54, II), en multipliant par s^{ℓ}, en posant $\frac{s'}{s} = u$ et en faisant tendre s vers 0, on obtient :

$$0 = - L_A + \frac{1}{\pi} L_A \int_0^{\infty} \frac{u^{1-\ell}}{1 + u^2}\, du \quad ,$$

égalité qui peut être vérifiée seulement si :

$$(56) \qquad \int_0^{\infty} \frac{u^{1-\ell}}{1 + u^2}\, du = \pi \quad .$$

Le premier membre de (56, II) se calcule par la méthode des résidus (Annexe A 3) et il vient finalement :

$$(56') \qquad \sin\left((1 - \ell)\,\pi\right) = \sin\left((1 - \ell)\,\frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

On montre que la seule solution de (56', II) comprise entre 0 et 1 est $\ell = \frac{1}{3}$, ce qui est bien en accord avec les résultats prévus par [36]. Ainsi, l'hypothèse d'intégrabilité de l'inconnue $\hat{\phi}$ de l'équation intégrale est suffisante pour connaître les singularités au voisinage de la pointe, il faut donc admettre qu'elle est équivalente à la condition d'intégrabilité de Meixner et suffit à assurer l'unicité de la solution.

EQUATIONS INTEGRALES A INCONNUES NON SINGULIERES

Pour la commodité de résolution numérique des équations intégrales, nous avons, dans le cas des réseaux possédant des pointes, transformé les diverses équations intégrales afin que la fonction inconnue soit partout régulière, mais sans pour cela transférer les singularités dans les noyaux.

Nous considérons l'équation (15, II) et définissons le changement de variable suivant :

(57) $du = T(s)\, ds$,

où $T(s)$ est une fonction partout intégrable et telle que, au voisinage de la pointe du réseau (nous supposons pour simplifier que $\mathcal{S}$ n'en compte qu'une et nous la choisissons pour origine des abscisses curvilignes), $T(s)$ possède le même type de singularité que $\hat{\phi}(s)$, $T(s)\,|s|^{\ell}$ restant borné.

L'équation (15, II) peut alors s'écrire :

$$\frac{p(s)}{T(s)} = -\frac{\hat{\phi}(s)}{T(s)} + \int \frac{1}{T(s)}\, \eta_0(s, s')\, \frac{\hat{\phi}(s')}{T(s')}\, T(s')\, ds' \quad .$$

On pose alors :

(58) $$\hat{\phi}^{*}(u) = \frac{\phi(s(u))}{T(s(u))} \quad ,$$

(59) $$p^{*}(u) = \frac{p(s(u))}{T(s(u))} \quad ,$$

(60) $$\eta_0^{*}(u, u') = \frac{1}{T(s(u))}\, \eta_0(s(u)\ ,\ s'(u')) \quad ,$$

et il vient donc :

$$p^{*}(u) = -\hat{\phi}^{*}(u) + \int \eta^{*}_{0}(u, u')\,\hat{\phi}^{*}(u')\,du' ,$$

équation intégrale où la fonction $\hat{\phi}^{*}(u)$ est partout bornée d'après (58, II), le noyau $\eta^{*}_{0}(u, u')$ étant obtenu à partir de $\eta_{0}(s, s')$ après multiplication par la fonction $\frac{1}{T(s)}$ partout bornée et tendant vers 0 aux pointes.

On peut naturellement trouver beaucoup de fonctions $T(s)$ vérifiant les critères que nous avons fixés. La figure 13 fournit un exemple de détermination possible avec :

$$T(s) = s_1^{\ell}\ |s|^{-\ell} \qquad \text{si} \quad -s_1 < s < +s_1 ,$$

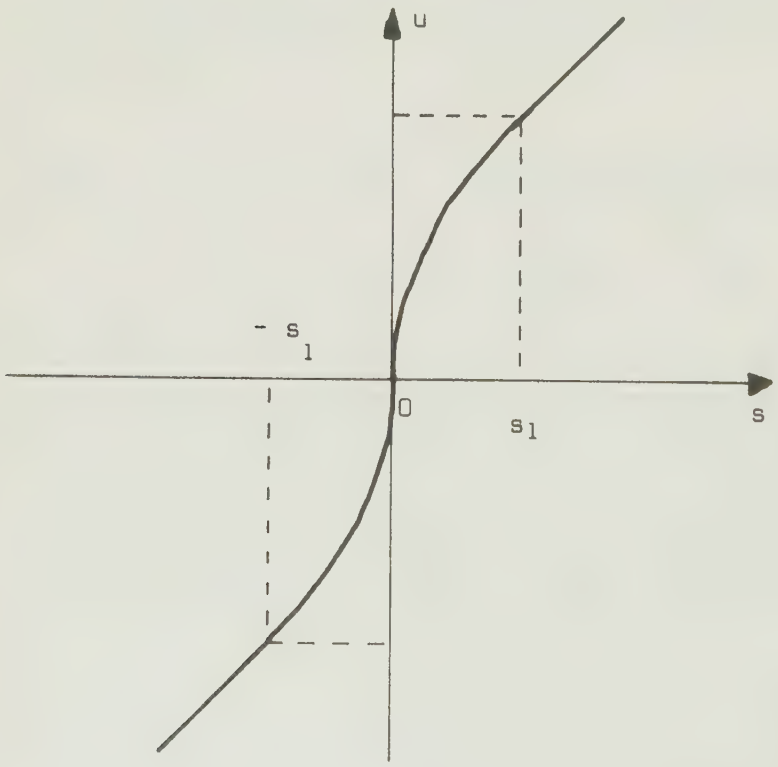


Figure 13 -

Exemple de détermination d'une fonction $T(s)$.

et $T(s) = 1$ partout ailleurs, s_1 pouvant être naturellement choisi en fonction de critères numériques.

On peut bien entendu généraliser ces considérations au cas d'un nombre fini de pointes, on peut aussi adopter pour ℓ une valeur supérieure à la singularité en gardant cependant $\ell < 1$, dans ce dernier cas, la nouvelle fonction inconnue est nulle sur la pointe.

On étend sans difficultés les calculs précédents à toutes les équations intégrales que nous avons décrites et on peut montrer alors que (7', II), (15, II), (15', II), (34 , II), (34', II), (34", II) s'écrivent strictement de la même manière en ajoutant des astérisques aux fonctions rencontrées et en posant, outre (57, II), (58, II), (59, II) et (60, II) :

$$\text{(58')} \qquad \hat{\psi}^{*}(u) = \frac{1}{T(s(u))}\,\hat{\psi}\,(s(u)) \quad ,$$

$$\text{(59')} \qquad w^{*}(u) = w(s(u)) \quad ,$$

$$\text{(60')} \qquad \mathcal{G}_0{}^{*}(u, u') = \mathcal{G}_0(s(u), s'(u')) \quad ,$$

$$\text{(60")} \qquad \mathcal{G}_1{}^{*}(u, u') = \mathcal{G}_1(s(u), s'(u')) \quad ,$$

$$\text{(60"')} \qquad \eta'_1{}^{*}(u, u') = \frac{1}{T(s'(u'))}\,\eta'_1\,(s(u), s'(u')) \quad .$$

Dans chaque équation, $T(s)$ est déterminée en fonction des singularités prévues de la fonction inconnue sur les pointes.

Nous n'aborderons pas dans ce chapitre le traitement numérique de la théorie des réseaux lamellaires exposée au premier chapitre. Il n'a pas posé de problèmes importants et, pour plus d'information à ce sujet, on pourra se reporter à l'annexe P 1 [37] .

Deux grands types de méthodes ont été utilisés pour résoudre les équations intégrales décrites au chapitre précédent. La première méthode, utilisée précédemment par R. Petit [20] , consiste à projeter les deux membres de l'équation sur la base de Fourier, après développement de la fonction inconnue sur cette même base. Elle s'adapte particulièrement bien au cas des réseaux dont le profil peut être décrit par un certain nombre de segments de droite. Au début de nos travaux nous l'avons donc appliquée successivement aux réseaux échelettes infiniment conducteurs (annexe P 2, [38]) puis aux réseaux dont le profil, décrit par quatre segments de droite dont deux horizontaux, est voisin de celui des réseaux holographiques (annexe P 3, [39] , et annexe P 4, [40]). Nous n'avions pas le choix : c'était alors la seule méthode susceptible d'être appliquée sans gros ennuis aux équations intégrales des réseaux comportant des pointes. Elle présente cependant de sérieux inconvénients.

D'abord, son application suppose qu'on tronque brutalement la série qui décrit le noyau de l'équation, et ceci, numériquement, est mauvais : souvent, la conservation d'énergie ne pouvait être vérifiée à mieux que 5 %. Enfin, et surtout, il est clair que la difficulté d'élaboration du programme devient rapidement insurmontable si, par souci de généralisation et aussi pour mieux représenter le profil d'un réseau donné, on veut augmenter le nombre des segments de droite décrivant le profil. Si pour le réseau échelette (deux segments) il n'y a pas eu de gros problèmes, le réseau décrit par quatre segments a demandé beaucoup de temps et d'efforts : il demeure incontestablement notre plus mauvais souvenir de programmeur.

CHAPITRE III

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES

Ces premiers travaux sont aujourd'hui largement dépassés aussi bien en précision qu'en rapidité de calcul, nous ne les décrirons donc pas.

Les programmes numériques ques nous avons développés depuis lors ont tous fait appel à la "méthode de discrétisation". A notre sens, elle consiste à écrire l'équation intégrale en un certain nombre de points disposés sur la période. Soit, par exemple sur $\mathcal{P}$ l'équation intégrale suivante :

$$(1) \qquad \boxed{\phi(s) = \phi_0(s) + \int \mathcal{A}(s, s')\ \phi(s')\ ds' \ ,}$$

où $\phi_0(s)$ et $\mathcal{A}(s, s')$ sont connus, $\phi(s)$ inconnue, l'intégration étant faite sur la période d de ces trois fonctions. On place d'abord sur $\mathcal{P}$ N points caractérisés par leurs abscisses curvilignes $s_i (i \in [1, N])$, ce qui permet d'écrire, ϕ étant bornée :

$$(2) \qquad \forall i,\ \phi(s_i) = \phi_0(s_i) + \int \mathcal{A}(s_i, s')\ \phi(s')\ ds' \ .$$

Il faut ensuite évaluer la valeur de l'intégrale en fonction des inconnues $\phi(s_i)$ et pour cela, on pose toujours :

$$(3) \qquad \forall_i,\ \int \mathcal{A}(s_i, s')\ \psi(s')\ ds' = \sum_{j=i}^{N} \left(a_{ij}\ \psi(s_j)\right) + \eta_i \ ,$$

où η_i dépend évidemment de la fonction ψ périodique qui est introduite dans le premier membre de (3, III). En fait, les a_{ij} sont calculés après adoption d'une méthode d'intégration et les η_i, négligés par la suite, représentent l'erreur commise dans cette intégration. On écrit donc finalement d'après (2, III) et (3, III) :

$$(4) \qquad \boxed{\phi(s_i) = \phi_0(s_i) + \sum_{j=i}^{N} a_{ij}\ \phi(s_j) \ ,}$$

système linéaire que l'on peut résoudre par une méthode classique ; nous avons toujours utilisé pour notre part la méthode du pivot maximum. La plus grande partie du travail numérique consiste donc à associer à chacun des opérateurs définis au chapitre II une matrice carrée de rang N . Une réflexion s'impose donc avant tout calcul, afin de faire un choix sur le nombre de points de discrétisation et leur position sur $\mathcal{P}$, puis sur la méthode d'intégration. Naturellement, ces choix constituent toujours un compromis : il faut d'une part que les n_i de (3, III) soient les plus petits possibles, compte tenu des informations dont on peut disposer à l'avance sur le noyau $\mathcal{A}$ (s, s') et la fonction inconnue (mais ayant un sens physique) ϕ , d'autre part que le temps de calcul ne soit pas trop élevé.

1) CHOIX DU NOMBRE ET DE LA POSITION DES POINTS DE DISCRETISATION.

La fonction $\phi(s)$ décrit, en fonction de l'abscisse curviligne, la variation d'une grandeur physique liée aux champs électromagnétiques, on peut donc prévoir grossièrement que sa partie réelle et sa partie imaginaire ne présenteront pas plus que un maximum et un minimum par longueur d'onde † . La figure 14 a fournit l'exemple d'une fonction qui pourrait être la partie réelle ou la partie imaginaire de ϕ .

† Ceci serait rigoureusement vrai si le réseau était remplacé par un miroir.

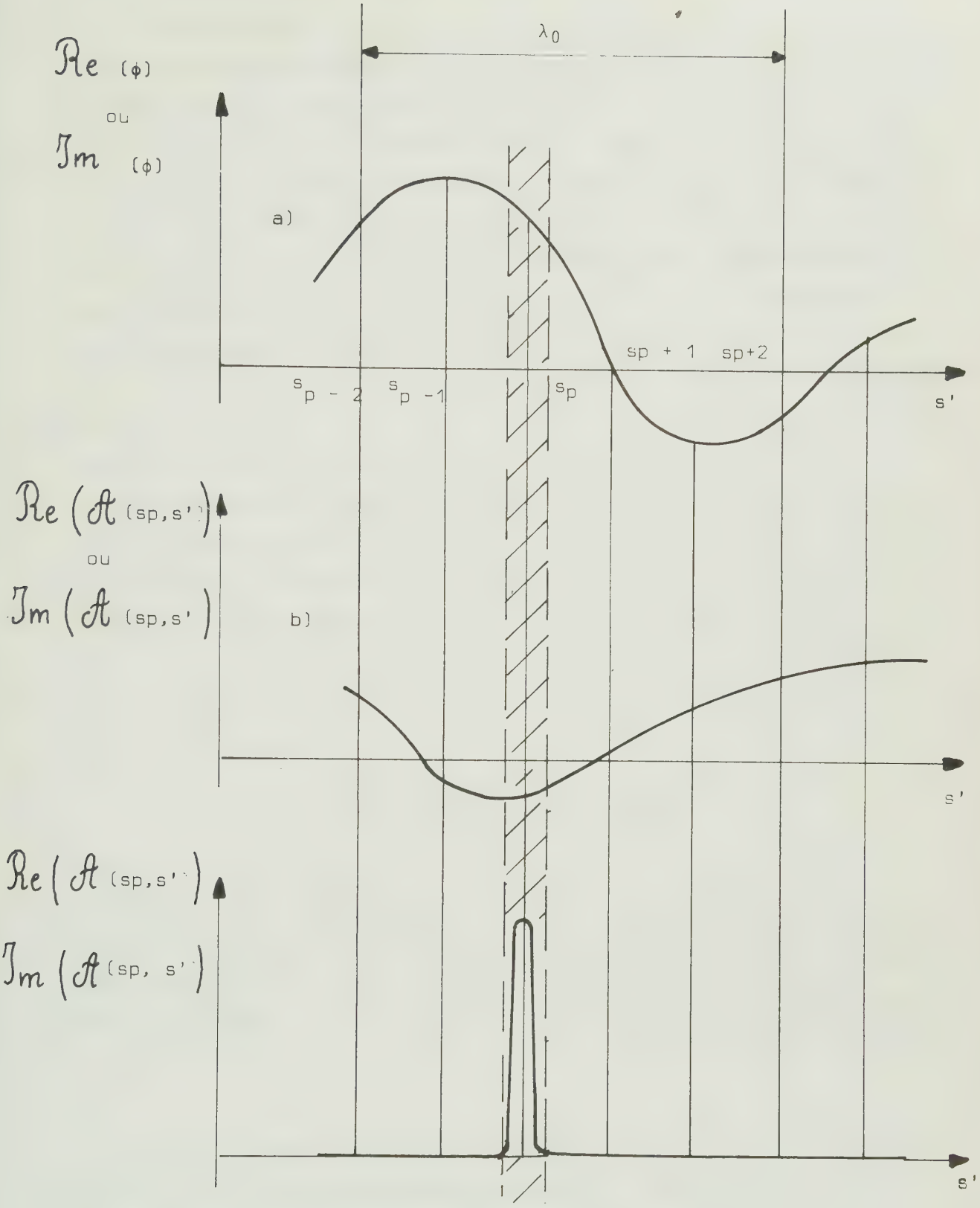


Figure 14

Comportement de ϕ et du noyau.

Il faut naturellement que les positions des points de discrétisation soient telles que les deux membres de (1, III) soient suffisamment bien représentés par leur valeur en ces points. Sur la figure 14 a, 6 points bien disposés sur une longueur d'onde représentent la fonction de manière convenable : la courbe obtenue en reliant les points par des segments de droite est très proche du graphe de $\phi(s)$. Nos expériences numériques nous amènent effectivement à penser que six points par longueur d'onde sont très souvent bien suffisants ; pour des réseaux à profil sinusoïdal, λ_0 étant petit devant d, on a quelquefois fait des calculs avec seulement deux points par longueur d'onde, ce qui constitue évidemment un cas extrême.

Bien entendu, des critères numériques que nous définirons par la suite peuvent permettre de vérifier le bien fondé du choix préalable de N. La discrétisation a toujours été faite à pas constant sur Ox dans le cas des réseaux sans pointes, et à pas constant sur la variable déduite de l'abscisse curviligne par (57, II) pour les réseaux comportant des pointes.

2) CHOIX DE LA METHODE D'INTEGRATION

Quand, comme sur la figure 14 b, le noyau $\mathcal{A}(s, s')$ a pour s fixé un graphe aussi régulier que ϕ, on peut penser, compte tenu de la périodicité, que la "méthode des trapèzes" est toute indiquée, en raison de sa commodité, pour effectuer (3, III). Les points d'intégration étant confondus avec ceux choisis précédemment pour la discrétisation, on écrit :

$$(5) \qquad a_{ij} = \frac{1}{2}\, \mathcal{A}(s_i, s_j) \times (s_{j+i} - s_{j-i}) \quad .$$

Nous verrons par la suite qu'il est possible de généraliser aux $\mathcal{A}(s, s')$ singuliers. Après étude théorique et numérique, nous sommes

arrivés à la conclusion que cette méthode d'intégration est toujours très efficace quand $\mathcal{A}$ est un des opérateurs déduits de G_0^c, c'est-à-dire $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}'_0$ ou $\mathcal{C}$. Cette remarque reste vraie pour $\mathcal{G}_{f_1}$ et $\mathcal{N}'_1$ à condition que la conductivité du métal ne soit pas élevée. Par contre, pour les conductivités plus élevées, $\mathcal{G}_{f_1}(M, M')$ et $\mathcal{N}'_1(M, M')$ prennent pour M fixé l'allure de la fonction représentée sur la figure 14 c : si la conductivité croit, ces fonctions tendent vers des "fonctions de Dirac"†. Il est bien difficile d'établir une frontière précise, pour chaque métal, entre ces deux types de comportement ; pour l'aluminium, elle se situe vers $\lambda_i = 0{,}4\ \mu m$. Ainsi, à $\lambda_0 = 0{,}546\ \mu m$, $\mathcal{G}_{f_1}(M, M')$ peut être pratiquement considéré égal à 0 si $MM' > \frac{\lambda_0}{10}$ (voir annexe P 5, [41]). Bien entendu, on pourrait toujours intégrer par la méthode des trapèzes à condition de serrer suffisamment les points d'intégration, mais alors le nombre d'inconnues $\phi(s_i)$ et d'équations devient plus élevé. Dans le cas de l'aluminium, compte tenu de la capacité en mémoire de l'U. N. I. V. A. C. 1110 qui ne nous autorise pas à prendre $N > 70$, on peut ainsi repousser généralement la limite de la "méthode des trapèzes" jusque vers 0,8 µm mais le temps de calcul s'en ressent alors durement. Il est plus raisonnable, au-dessus de 0,4 µ, d'intégrer les expressions où figurent $\mathcal{G}_{f_1}$ et $\mathcal{N}'_1$ par une "méthode de sommation locale".

On peut remarquer en effet (figure 14 c) que dans la zone où $\mathcal{A}(s_p, s')$ prend une valeur non nulle, $\phi(s')$ peut sans grande erreur être assimilé à un polynôme de faible degré P. Après utilisation d'une méthode de représentation locale d'une fonction par un polynôme, on peut calculer linéairement les coefficients de ce polynôme en fonction des $\phi(s_i)$. Par exemple, si $P = 0$, on pose $\phi(s') = \phi(s_p)$ et de (3, III),

† Ce comportement est intuitif : $G_1(X, Y)$ est lié au champ diffracté en P(X, Y) par des courants parallèles à Oz, espacés de d sur l'axe des x et d'amplitude unité. Quand la conductivité augmente, l'épaisseur de peau diminue et le champ diffracté ne prend des valeurs notables qu'au voisinage des courants.

on déduit :

$$(6) \qquad a_{pj} = \delta_{pj} \int \mathcal{A}\,(s_p, s')\, ds' \quad .$$

La matrice associée à l'opérateur $\mathcal{A}$ se réduit à sa diagonale principale. Une meilleure approximation (P = 2) consiste à représenter ϕ par un polynôme du second degré prenant les mêmes valeurs que $\phi(s')$ pour $s' = s_{p-1}$, $s' = s_p$ et $s' = s_{p+1}$; la matrice ainsi définie compte, outre la diagonale principale, les deux diagonales adjacentes non nulles. Nous verrons par la suite que les coefficients a_{ij} donnés par (6, III) se calculent analytiquement, ce qui est évidemment un des grands avantages de cette méthode. En employant les polynômes de Lagrange [42] , on peut ainsi donner à P des valeurs croissantes et on a pu numériquement constater pour les réseaux d'aluminium, que la convergence des résultats se produisait au-dessus de $\lambda_0 = 0{,}3\,\mu m$ environ. Il est très important de noter qu'au-dessus de 0,4 µm,l'approximation correspondant à P = 0 et aboutissant à (6, III) est suffisante si l'on se contente d'une précision de l'ordre du centième †. Par la suite, nous avons donc toujours pris P = 2.

3) DEFINITION DE $\mathcal{G}_1$ ET $\mathcal{N}'_1$

On doit adopter pour $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{N}'_1$ une des deux définitions proposées par l'annexe A 2. Là aussi, c'est la commodité numérique qui guide le choix. Si la définition par une série d'exponentielles s'adapte mieux aux réseaux de faible conductivité, la définition faisant appel aux fonctions de Hankel se

† Ce résultat très important peut être prévu de manière analytique en introduisant dans (3, III) des fonctions test intégrables analytiquement (voir annexe P 5).

révèle plus judicieuse pour les fortes conductivités. Par un heureux hasard, la longueur d'onde frontière λ_s fixée numériquement par la commodité est pratiquement confondue avec λ_i, frontière précédemment définie entre les deux méthodes d'intégration. Pour l'aluminium, elle se situe donc vers 0,4 µm.

Les opérateurs définis au second chapitre ayant des propriétés très différentes, nous avons cru bon de consacrer une grande partie de ce chapitre à l'étude spécifique de chacun d'eux. Nous supposons que $\mathcal{S}$ ne comporte pas de pointes, dans l'éventualité contraire, il faudrait évidemment tenir compte des remarques du II. 4.

4) ETUDE DE η_0 ET η'_0.

Ces fonctions sont données par (16, II) et (16', II). Les calculs fastidieux sont portés dans l'annexe A 4.

4 - 1. SOMMATION

Quand M et M' sont distincts, de toute évidence ces séries convergent et on pourrait donc les calculer en les tronquant brutalement. En se reportant à (11, A 4) et (16, A 4) pour les définitions, on vérifie que :

$$(7) \qquad \eta_0(M, M') = \frac{1}{d}\left(n_y(M)\ \mathrm{sgn}(y - y')\ S_2(M, M') + n_x(M)\ S_3(M, M')\right).$$

Il est donc judicieux de calculer S_2 et S_3 en utilisant (14, A 4) et (19, A 4). $\eta_0(M, M')$ se présente ainsi comme la somme d'une fonction analytique aisément calculable à partir de (13, A 4) et (18, A 4), et d'une série convergent bien plus rapidement que celle portée dans (7, III), surtout si M et M' sont proches. La même remarque peut être faite pour η'_0 en remplaçant $n_x(M)$ et $n_y(M)$ par $n_x(M')$ et $n_y(M')$.

4 - 2. LIMITES QUAND $M' \to M$

Quand $y' = y$, $\operatorname{sgn}(y - y')$ n'est pas défini. Deux cas peuvent être envisagés. Si M est distinct de M', on peut montrer grâce aux méthodes de sommation adoptées précédemment que $\eta_0(M, M')$ et $\eta'_0(M, M')$ sont bornés et continus. Si on a pris la peine de procéder ainsi qu'il est indiqué au III. 4. 1., on s'aperçoit aisément que la contribution des séries est nulle et que le terme compact est continu. Par contre, si M est confondu avec M', il faut prendre des précautions : une étude détaillée du comportement des fonctions quand $M' \to M$ s'impose.

D'après (15, A 4), (22, A 4) et (7, III) :

$$(9)\qquad \eta_0(M, M') = \frac{1}{d} n_x(M) \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \frac{1}{\pi} \frac{n_y(M)(y - y') + n_x(M)(x - x')}{(s - s')^2}$$

$$+ \frac{ik_0 \sin\theta (y - y')\left[n_y(M)(x' - x) + n_x(M)(y - y') \right]}{(s - s')^2} + \gamma_4'(M, M')$$

avec $\gamma'_4(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

Si $\mathcal{P}$ admet en M un rayon de courbure algébrique R, (9, III) devient ;

$$(10) \qquad \eta_0(M, M') = -\frac{1}{2.\pi.R} + i\,\frac{k_0 \sin\theta}{\pi}\,n_x + \frac{1}{d}\,n_x \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \gamma_4(M, M') \quad ,$$

avec $\gamma_4(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

Après un calcul similaire, il vient :

$$(11) \qquad \eta_0'(M, M') = +\frac{1}{2.\pi.R} + i\,\frac{k_0 \sin\theta}{\pi}\,n_x + \frac{1}{d}\,n_x \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \gamma_5(M, M') \quad ,$$

avec $\gamma_5(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

Chacune des deux fonctions $\eta_0(M, M')$ et $\eta_0'(M, M')$ admet donc une limite finie si $M' \to M$, elle est donnée par (10,III) ou (11, III).

4 - 3. INTEGRATION

Compte tenu des remarques précédentes, l'intégration ne pose aucun problème particulier et on a toujours adopté la "méthode des trapèzes" traditionnelle, elle permet le calcul des matrices correspondant aux opérateurs.

5) ETUDE DE $\mathcal{G}_0$

$\mathcal{G}_0(M, M')$, donné par (10, II) converge pour tout M différent de M' . Il est cependant judicieux de remarquer que d'après (1, A 4) :

$$\mathcal{G}_0(M, M') = -\frac{1}{2 i d k_0} \quad S_1 \quad . \tag{12}$$

Après utilisation de (5, A 4), la série qu'il reste à sommer est toujours convergente et sa somme est donnée par (8, A 4) si $M' \to M$, ce qui autorise la méthode des trapèzes. Par contre, le terme compact donné par (4, A 4) admet si $M' \to M$ une singularité logarithmique et on ne peut envisager pour l'intégrale correspondante une "méthode des trapèzes". Par suite, on définit :

$$S_1''(M, M') = -\frac{2 i d}{\lambda_0} \left\{ \text{Log} \left| s - s' \right| + \text{Log}(s_M - \left| s - s' \right|) \right\}, \tag{13}$$

ou S_M est l'intervalle de variation de l'abscisse curviligne sur une période du réseau. On pose alors :

$$\int S'_1(M, M')\ \phi(s')\, ds' = \int \left\{ S'_1(M, M')\phi(s') - S''_1(M, M')\,\phi(s) \right\} ds' + \phi(s) \int S''_1(M, M')\, ds' \quad . \tag{14}$$

Dans le second membre de (14, III) le premier terme est régulier et intégrable par la "méthode des trapèzes" sachant que :

$$(15) \qquad \lim_{M' \to M} \left\{ S'_1(M, M')\, \phi(s') - S''_1(M, M')\, \phi(s) \right\} = \frac{2\, i\, d}{\lambda_0}$$

$$\cdot (- \operatorname{Log} K + \operatorname{Log} s_M)\, \phi(s) \quad ;$$

le dernier terme, singulier, s'intègre analytiquement :

$$(16) \qquad \forall_M \ , \int S''_1(M, M')\, ds' = - \frac{4\, i\, d}{\lambda_0} \cdot s_M (\operatorname{Log} s_M - 1) \quad .$$

En procédant de cette manière, le calcul d'un élément de la matrice associée à $\mathcal{G}_0$ se réduit à deux intégrations par la méthode des trapèzes, la troisième intégration, analytique, ne dépend pas de M. Ainsi est justifiée, a posteriori, l'introduction de $S''_1(M, M')$, fonction choisie pour trois raisons :

- son intégrale se fait analytiquement et ne dépend pas de M (ce n'est pas le cas de $S'_1(M, M')$) ,

- elle bénéficie, sur la période du réseau, des propriétés d'une fonction périodique † , ce qui est essentiel pour la précision de l'intégration,

† On peut en effet vérifier élémentairement que pour s fixé, les valeurs de la fonction et de ses dérivées sont identiques en $s' = 0$ et $s' = s_M$ (figure 15).

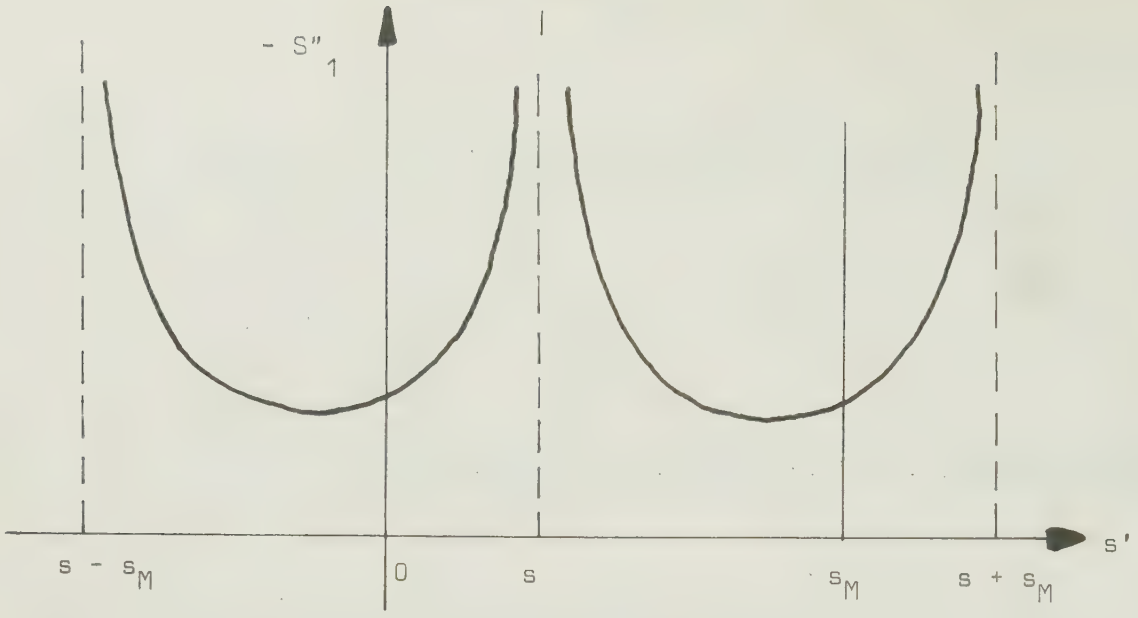


Figure 15 - graphe de S''_1 (M, M') pour M fixé.

- elle a la même singularité que $S_1(M, M')$.

6) ETUDE DE $\mathcal{C}$

Bien que nous ne l'ayons vu apparaître qu'en diffraction conique, nous pouvons nous contenter de l'étudier en diffraction classique et d'après (45, II), il s'écrit alors :

$$(17) \qquad \mathcal{C}(M, M') = \frac{1}{d} \sum_m \left[- n_x(M) \operatorname{sgn}(y - y') + \frac{\alpha_m}{\beta_m} n_y(M) \right]$$

$$\cdot \exp \left[i k_0 \beta_m |y - y'| + i m K(x - x') \right] .$$

6 - 1. SOMMATION

Quand M est distinct de M', la série converge ; cependant, comme précédemment, il est bon de remarquer que d'après (11, A 4) et (16, A 4) :

$$(18)\qquad \mathcal{C}(M, M') = \frac{1}{d}\left\{ - n_x(M)\ \mathrm{sgn}(y - y')\ S_2(M, M') + n_y(M)\ S_3(M, M') \right\}$$

et tenir compte de (14, A 4) et (19, A 4) pour accélérer la convergence.

6 - 2. COMPORTEMENT QUAND M' → M, INTEGRATION

D'après les remarques du paragraphe précédent, (15, A 4) et (22, A 4) :

$$(19)\qquad \mathcal{C}(M, M') = \frac{1}{d}\ n_y(M) \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \frac{1}{\pi}\ n_y(M)\ .\ \frac{(x - x') + ik_0\sin(\theta)(y - y')^2}{(s - s')^2}$$

$$- \frac{1}{\pi}\ n_x(M).\ \frac{(y - y') + i\ k_0\sin(\theta)(x' - x)(y - y')}{(s - s')^2} + \gamma_5\ (M, M')\ ,$$

avec $\gamma_5(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

Pour simplifier (19, II), on remarque que :

$$\lim_{M' \to M} \left(\frac{n_y(y - y')^2 - n_x(y - y')(x' - x)}{(s' - s)^2} \right) = 0\ ,$$

$$\frac{n_y(M)\,(x - x') - n_x(M)\,(y - y')}{(s' - s)^2} = \frac{\vec{e}_3\,(\vec{n}(M) \wedge \vec{M}\,M')}{(s' - s)^2} \quad ,$$

et il vient finalement :

$$(20) \qquad \mathcal{C}(M, M') = \frac{1}{d}\, n_y(M) \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} - \frac{1}{\pi(s' - s)} + \gamma_6(M, M')$$

avec $\gamma_6(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

$\mathcal{C}(M, M')$ est donc singulier mais intégrable au sens de Cauchy, nous introduisons pour cela :

$$(21) \qquad \mathcal{C}'(M, M') = \frac{1}{\pi(s - s')} - \frac{\mathrm{sgn}(s - s')}{s_M - |s - s'|} \quad ,$$

et posons :

$$(22) \qquad \int \mathcal{C}(M, M')\,\phi(s')\,ds' = \int \left\{ \mathcal{C}(M, M')\,\phi(s') - \mathcal{C}'(M, M')\,\phi(s) \right\} ds' + \phi(s) \int \mathcal{C}'(M, M')\,ds' \quad .$$

On trouve élémentairement que d'après (21, III), le dernier terme du second membre de (22, III) est nul quel que soit M , le premier terme est borné et en particulier :

$$(23)\qquad \lim_{M' \to M} \left[\mathcal{K}(M, M')\,\phi(s') - \mathcal{K}'(M, M')\,\phi(s) \right] = \frac{1}{d}\, n_y \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m}\, \phi(s)$$

$$- \frac{1}{\pi}\, \frac{d\phi(s)}{ds} + \frac{1}{s_M}\, \mathrm{sgn}(s - s')\, \phi(s) \quad .$$

La présence du dernier terme discontinu de (23, III) entraîne que la limite n'est pas la même de part et d'autre de M . Toutefois, si on intègre le premier membre de (23, III) par la méthode des trapèzes à pas constant, on peut sans aucun inconvénient ne pas tenir compte de ce dernier terme (figure 16).

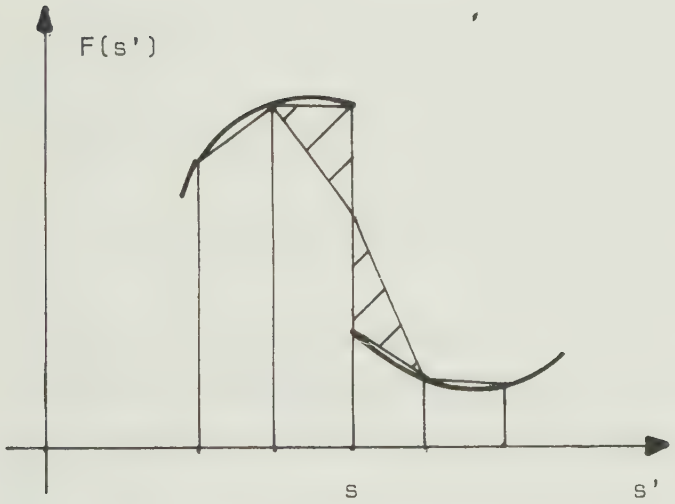


Figure 16 -

Pour intégrer par une méthode des trapèzes à pas constant la fonction F(s') discontinue en s' = s , on peut supposer que la valeur de F(s') au point de discontinuité est égale à la moyenne des deux valeurs limites, les aires des triangles hachurés étant égales.

Le calcul de la dérivée $\frac{d\phi}{ds}$ au point M d'abscisse curviligne s_i peut se faire par exemple en posant :

$$\frac{d\phi(s)}{ds}(s = s_i) = \frac{\phi(s_{i+1}) - \phi(s_{i-1})}{s_{i+1} - s_{i-1}} \quad .$$

Après application de la méthode des trapèzes pour intégrer le terme régulier de (23, III), on peut donc calculer la matrice associée à l'opérateur. On remarquera l'importance de la fonction $\mathcal{C}'(M, M')$ qui joue ici un rôle identique à la fonction $S_1''(M, M')$ du III. 5. 2.

7) ETUDE DE $\mathcal{G}_1$ ET $\mathcal{N}_1'$.

Dans le domaine des faibles conductivités, on pourra se reporter à l'étude de $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{N}_0'$. Pour les fortes conductivités, il est préférable, conformément à l'annexe A 2, de donner aux opérateurs des définitions différentes :

$$(24) \qquad \mathcal{G}_1 \phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{4} H_0^+ (k_1 |\vec{MM'}|) \exp\left\{ik_0 \sin(\theta)(x' - x)\right\} \phi(s')\, ds' \ ,$$

$$(25) \qquad \mathcal{N}_1' \phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik_1}{2} \vec{n}(M') \cdot \frac{\vec{MM'}}{|\vec{MM'}|} \cdot H_1^+ (k_1 |\vec{MM'}|) \exp\left\{ik_0 \sin(\theta)(x' - x)\right\} \cdot \phi(s')\, ds' \ .$$

Pour effectuer les intégrales figurant dans les seconds membres de (24, III) et (25, III) par la méthode de sommation locale précédemment justifiée, on écrit d'abord :

$$(26) \qquad |\vec{MM'}| = |s' - s| \cdot \left\{1 + a_1 (s' - s) + a_2 (s' - s)^2 + \ldots + a_i (s' - s)^i + \ldots\right\} \ ,$$

les a_i étant connus à partir des caractéristiques géométriques de $\mathcal{P}$ en M_i . On peut alors écrire grâce à la formule de Taylor appliquée en $|s' - s|$:

$$(27)\qquad H_0^+(k_1|\vec{MM'}|) = H_0^+(k_1|s'-s|) + \left\{ a_1|s'-s|\,(s'-s) + a_2|s'-s|\,(s'-s)^2 + \ldots \right\} \frac{d\,H_0^+(k_1|s'-s|)}{d(s'-s)} + \frac{1}{2}\left\{ a_1|s'-s|\,(s'-s) + a_2|s'-s|\,(s'-s)^2 + \ldots \right\}^2 \frac{d^2H_0^+(k_1|s'-s|)}{d(s'-s)^2} + \ldots \quad .$$

De toute évidence, compte tenu de la singularité de $H_0^+(z)$ en $z = 0$, le second membre de (27, III) convergera à condition qu'au voisinage de M :

$$\left| |\vec{MM'}| - |s'-s| \right| < |s'-s| \quad ,$$

soit $|a_1|\,|s'-s| + |a_2|\,|s'-s|^2 + \ldots + |a_i|\,|s'-s|^i + \ldots < 1$.

Ceci est toujours vérifié si $\mathcal{P}$ n'a pas de trop brusques variations au voisinage de M . Enfin, on calcule aisément les b_m tels que :

$$(28)\qquad \exp(ik_0 \sin(\theta)(x'-x)) = b_0 + b_1(s'-s) + \ldots + b_m(s'-s)^m + \ldots ,$$

et grâce aux polynômes de Lagrange [42] , on approxime localement $\phi(s')$ par un polynôme de degré P fixé :

$$(29)\qquad \phi(s') = \sum_{m=0}^{P} C_m\,(s'-s)^m \quad ,$$

où les C_m sont des fonctions linéaires connues des $\phi(s_i)$, valeurs de ϕ aux points de discrétisation.

Il reste à porter (27, III), (28, III) et (29, III) dans (24, III) et à effectuer les intégrales I_{mj} du type :

$$I_{mj} = \int_{s}^{\infty} \frac{d^m H_0^+(k_1 |s' - s|)}{d(s' - s)^m} (s' - s)^j \, ds' \quad .$$

On remarque pour cela que $H_0^+(|z|)$ est paire et on montre en posant $z = k_1 (s' - s)$:

$$I_{mj} = k_1^{m-j-1} \int_{\Delta_1} \frac{d^m H_0^+(z)}{dz^m} z^j \, dz \quad ,$$

où Δ_1 désigne dans le plan complexe la demi droite issue de l'origine et contenant l'affixe de k_1 . Comme on montre que $m - j - 1$ prend toujours des valeurs négatives, nous pouvons affirmer que le calcul que nous venons de faire consiste finalement à développer (24, III) en série de $\frac{1}{k_1}$.

Compte tenu de la parité de $H_0^+(|z|)$, cette série ne comprend que des termes de puissance impaire. Si on sait à l'avance le nombre de termes que l'on veut garder dans cette série, on peut facilement déterminer P ainsi que le nombre des termes à garder dans (26, III), et (27, III).

Les intégrales I_{mj} se calculent analytiquement, sachant que :

$$I_{mj} = - j \; I_{m-1 \; j-1} \quad .$$

On se ramène ainsi par récurrence au seul calcul des J_q définies par :

$$J_q = \int_{\Delta_1} H_0^+(z) \; z^q \, dz \quad .$$

Les J_q se font analytiquement en développant en puissances croissantes de p l'égalité suivante que l'on peut trouver dans les tables de transformées de Laplace [43] :

$$\int_0^\infty H_0^+(x) \exp(-p\,x)\,dx = \left(1 + p^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2i}{\pi} \operatorname{arg\,sh}\, p\right) .$$

Les calculs que nous venons d'exposer peuvent, après adaptation, permettre d'effectuer (21, III). Il apparaît ainsi clairement que notre méthode numérique permet de développer les deux membres de l'équation intégrale en puissances croissantes et impaires de $\frac{1}{k_1}$. Si on pose $\frac{1}{k_1} = 0$, comme on l'a vu au II. 2. 9., on obtient les équations intégrales du réseau parfaitement conducteur. L'approximation suivante, que nous avons qualifiée précédemment d'élémentaire (P = 0) , et qui conduit à associer à $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{N}_1'$ des matrices diagonales, consiste à garder les termes en $\frac{1}{k_1}$.

Il faut noter que, comme il n'y a pas de termes en $\frac{1}{k_1^2}$, l'approximation suivante consiste à garder les termes en $\frac{1}{k_1^3}$, ceci explique pourquoi l'approximation élémentaire est généralement suffisante dans le visible pour les réseaux d'aluminium. Pour nos calculs, nous avons généralement gardé les termes en $\frac{1}{k_1^3}$, l'erreur correspondante est donc en $\frac{1}{|k_1|^5}$.

8) VERIFICATIONS NUMERIQUES DES PROGRAMMES

Naturellement, la vérification élémentaire consiste à faire des tests de convergence. Ils consistent à donner aux divers paramètres choisis par le programmeur (nombre de points de discrétisation sur $\mathcal{S}$, nombre de termes dans la sommation du noyau, éventuellement nombre de termes dans les développements en puissances de $\frac{1}{k_1}$) des valeurs croissantes et à observer sur les résultats s'il se produit une convergence.

Naturellement, des essais préliminaires fixent les limites des programmes. Dans ces limites, la convergence se produit et on s'aperçoit même que, moyennant le respect de certaines règles simples, on peut être certain que le calcul que l'on vient d'effectuer se situe dans la zone de convergence, ce qui permet de gagner beaucoup de temps. Il semble que quelques problèmes de convergence se posent encore quelquefois dans un cas : celui des réseaux possédant des pointes et utilisés autour de la longueur d'onde limite de 0.4 μm.

Il semble là que, à condition de se trouver dans une zone particulièrement tourmentée de la courbe d'efficacité, la convergence puisse être très lente quand on augmente le nombre de points de discrétisation ; quelquefois même, la limite de la capacité en mémoire de l'ordinateur est atteinte sans qu'aucune convergence n'ait pu être constatée.

Pour les réseaux de conductivité infinie, on peut appliquer le critère de conservation d'énergie. Il faut noter que dans les programmes actuellement opérationnels, on calcule à la fois, et pour chaque polarisation, les efficacités du réseau de conductivité finie qui nous intéresse mais aussi celles du même réseau considéré comme parfaitement conducteur. Comme une partie des calculs est commune (les matrices utilisées pour le réseau infiniment conducteur sont aussi utilisées pour la conductivité finie), la conservation d'énergie est aussi un critère pour les calculs en conductivité finie.

On a pu d'autre part vérifier des propriétés de nature physique comme le théorème de réciprocité du chapitre I. Il a été vérifié également qu'en faisant tendre le profil du réseau vers l'axe Ox, les résultats obtenus étaient en parfait accord avec les formules classiques de Fresnel.

Enfin, la meilleure vérification numérique consiste à confronter les résultats donnés par des méthodes différentes. Nous avons ainsi vérifié que ceux de nos propres programmes qui pouvaient être utilisés à la fois dans une zone commune étaient en parfait accord (c'est par exemple le cas

des programmes destinés à traiter le cas des réseaux de forte ou faible conductivité, la zone commune étant grossièrement confondue avec le visible). Bien entendu, chaque fois que cela a été possible, des vérifications mutuelles ont été faites avec les résultats obtenus grâce au formalisme différentiel. Si l'on excepte le cas des réseaux d'aluminium dans le visible et pour la polarisation H // , où l'application de ce dernier formalisme semble encore poser des problèmes, l'accord a toujours été excellent.

9) TABLEAU DES PROGRAMMES

Nous donnons ici un tableau des programmes réalisés et de leurs principales caractéristiques. Le temps de calcul est évidemment fonction de la difficulté du cas à traiter et nous ne donnons ici qu'une estimation grossière relative à un cas de difficulté moyenne. L'ordinateur employé est l'U. N. I. V. A. C. 1110 de la Faculté des Sciences d'Orsay, il a été utilisé grâce au terminal placé au centre de Physique Théorique du C. N. R. S. à Marseille. Les programmes précédés de l'astérisque * ne sont plus utilisés aujourd'hui. Les programmes suivis de ⚉ traitent simultanément, et pour chacun des deux cas fondamentaux de polarisation, le cas du réseau de conductivité finie qui nous intéresse et le cas du même réseau considéré parfaitement conducteur.

Réseau traité	Equation intégrale	Méthode numérique	Temps de calcul
Lamellaire ou créneau, E //	Méthode semi-analytique (chapitre I)	inversion de matrice	< 0,5 s
Lamellaire ou créneau, H // (adapté par J. L. Roumiguières).	Méthode semi-analytique (chapitre I)	inversion de matrice	< 0,5 s
* Réseau ∞ conducteur de forme quelconque E // ou H //	proposée dans [5]	discrétisation et méthode itérative proposée dans [5]	< 1 s
* Réseau ∞ conducteur de forme quelconque E // ou H //	proposée dans [5]	discrétisation et inversion de matrice.	# 1 s
* Réseau échelette infiniment conducteur E // ou H //	proposée dans [5]	Projection sur la base de Fourier.	qq s
* Réseau infiniment conducteur décrit par 4 segments de droite (2 horizontaux) E // ou H //	proposée dans [5]	Projection sur la base de Fourier.	# 10 s
Réseau sans pointes, de forme quelconque et et de faible conductivité. ⊕	(34, II) (34', II) (34", II) (34"', II)	Discrétisation et méthode des trapèzes.	< 5 s

Réseau sans pointes, de forme quelconque et de forte conductivité. ⊕	(34, II) (34', II) (34", II) (34"', II)	Discrétisation méthode des trapèzes et sommation locale.	< 5 s
Réseau possédant des pointes, et décrit par des segments de droites, faible conductivité. ⊕	"	Discrétisation, méthode des trapèzes après changement de variable.	< 10 s
Réseau possédant des pointes et décrit par des segments de droites, forte conductivité. ⊕	"	Discrétisation, méthode des trapèzes et sommation locale après changement de variable.	< 10 s
Réseau sans pointes, de forme quelconque, de faible conductivité et employé en diffraction conique.	(48, II) et (48', II) ou (49, II) et (49', II)	Discrétisation et méthode des trapèzes.	≠ 5 s

L'élaboration des programmes numériques utilisant les résultats donnés dans les deux précédents chapitres a été suivie par une première étude numérique, fondamentale pour la suite de l'exploitation des programmes : dans quels domaines est-il nécessaire d'employer la théorie des réseaux de conductivité finie ? . Autrement dit, dans quels domaines complémentaires la théorie des réseaux infiniment conducteurs, plus simple et donc moins coûteuse en temps de calcul, suffit-elle pour décrire convenablement les phénomènes de diffraction ?

On disposait certes de quelques informations préalables. Par exemple, dans l'ultra-violet au-dessous de 1000 Å, où la réflectivité de l'aluminium devient inférieure à 85 %, l'approximation de la conductivité infinie est exclue. Par ailleurs, l'accord des résultats théoriques de R. Petit avec les mesures expérimentales de R. Deleuil [44] permet de penser que dans le domaine des ondes millimétriques, la même approximation est largement suffisante. Dans la zone intermédiaire qui contient le visible, on croyait généralement que l'aluminium qui recouvre d'ordinaire les réseaux utilisés par les opticiens pouvait être considéré infiniment conducteur, puisque sa réflectivité est alors généralement supérieure à 90 %.

La surprise fut donc grande à la vue des premières courbes d'efficacité théoriques dont un exemple, porté sur la figure 17, a été présenté au congrès I. C. O. 9 [45]. Dans chaque cas fondamental, on a, pour un montage de Littrow dans l'ordre - 1, tracé la courbe d'efficacité d'un réseau sinusoïdal de 1000 traits par millimètre. On suppose d'abord l'aluminium infiniment conducteur, puis on lui attribue son indice complexe [46].

Si la figure 17 a (cas E //) est à peu près en accord avec les prévisions intuitives, il n'en est certes pas de même pour la figure 17 b (cas H //) : il existe un désaccord manifeste entre les deux courbes théoriques. Par exemple, l'efficacité pour λ_0 = 0,68 µm chute de 76 % à 14 % ; le sommet du "blaze", prévu égal à 81 % pour λ_0 = 0,70 µm passe à 60 % pour λ_0 = 0,75 µm ! Par ailleurs, au voisinage de λ_0 = 0,65 µm,

CHAPITRE IV

CONFRONTATION AVEC L'EXPERIENCE

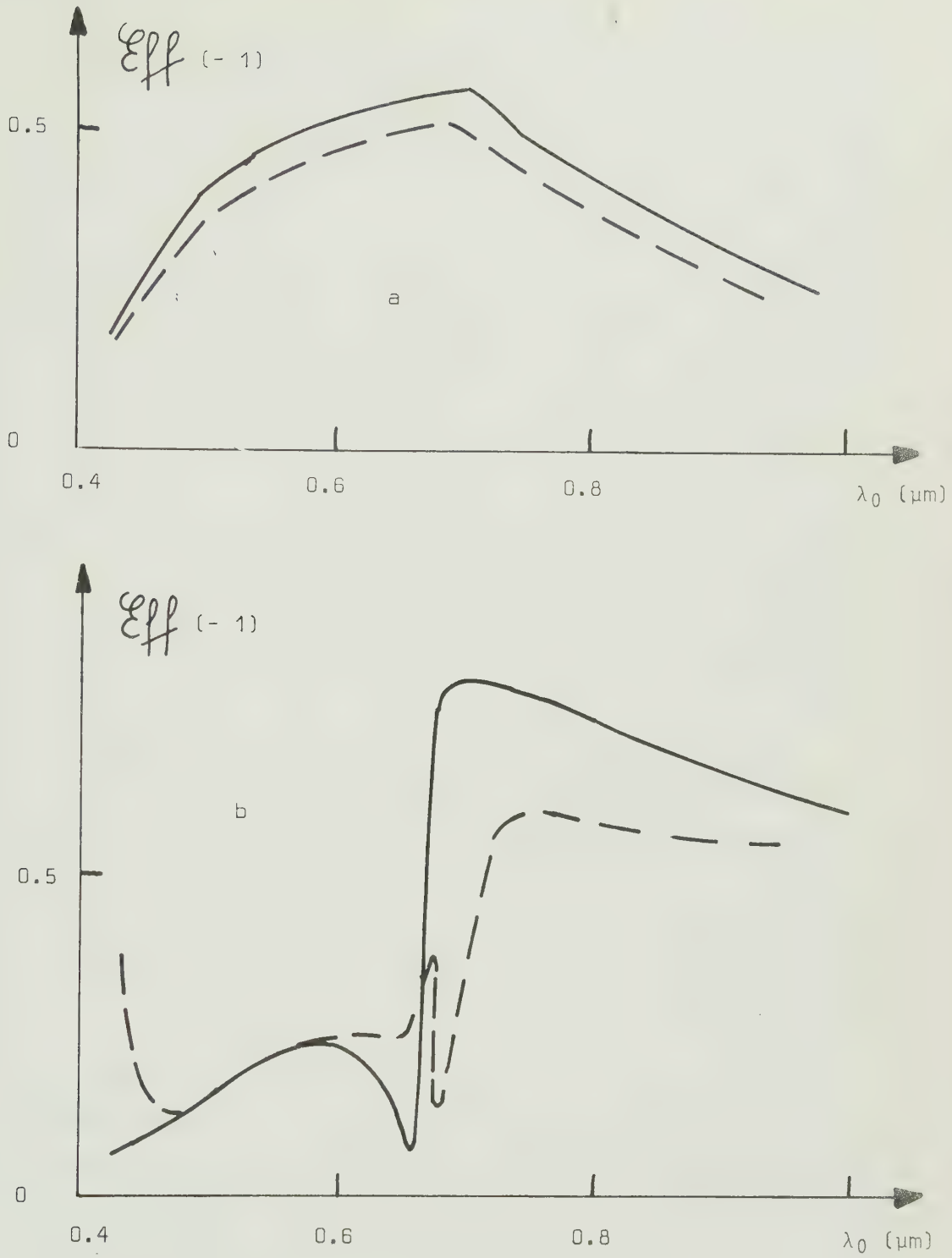


Figure 17 - *Courbes d'efficacité d'un réseau sinusoïdal de 1000 t/mm (h = 0.2 µm) en Littrow.*

——— *réseau parfaitement conducteur*

— — — *réseau d'aluminium.*

l'énergie totale emportée par les ondes progressives diffractées dans le vide est inférieure à la moitié de l'énergie incidente ! D'autres courbes théoriques, relatives à des réseaux sinusoïdaux ou échelettes, ont confirmé ces étonnants résultats, on pourra en trouver quelques exemples dans l'annexe P 6.

Ainsi, l'aluminium, au moins pour une polarisation (et par suite pour la lumière naturelle), ne peut dans le visible être considéré comme un métal infiniment conducteur, sous peine de grossières erreurs. Un certain scepticisme pourrait certes être exprimé, y compris par nous-mêmes : malgré les vérifications numériques, une erreur n'aurait-elle pas pu se glisser dans la théorie ou dans son application ? Il faut bien reconnaître que le support expérimental nous faisait cruellement défaut. Il était très souhaitable, pour la crédibilité des résultats que l'expérience tranche sans discussion, au moins une fois, en faveur des programmes prenant en compte la conductivité finie.

A l'occasion de nos premières études sur les réseaux holographiques, nous nous étions procurés un réseau holographique de 1200 traits/mm. Grâce à l'aide du Laboratoire d'Optique de la Faculté des Sciences de Saint-Jérôme, nous avions pu mesurer l'efficacité de ce réseau pour les deux polarisations et dans un montage de Littrow. Les résultats, portés sur la figure 18, étaient en parfait accord avec quelques mesures faites préalablement chez le constructeur Jobin-Yvon.

C'était donc une tentation naturelle que d'essayer de retrouver théoriquement, grâce à nos programmes numériques, ces courbes d'efficacité.

Cette entreprise passait inévitablement par une connaissance du profil du réseau.

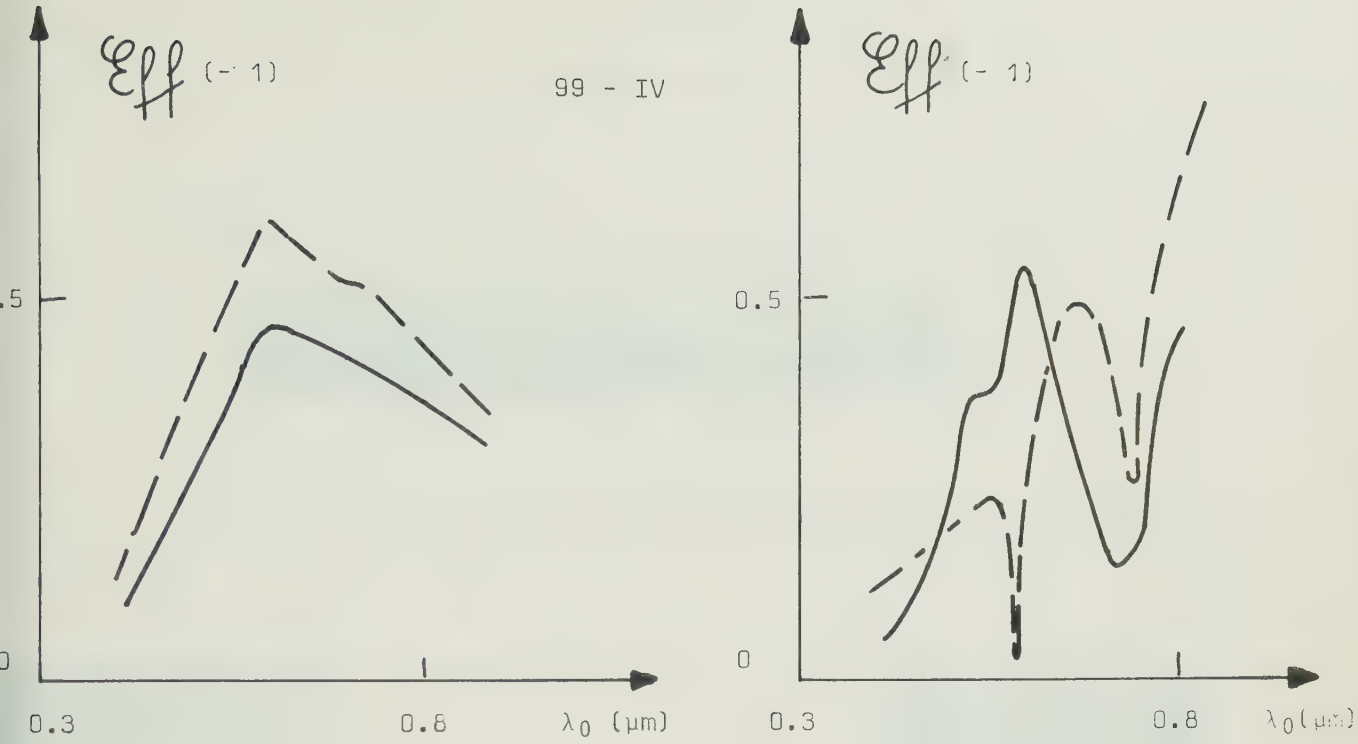


Figure 18 - Courbes d'efficacité en Littrow d'un réseau holographique de 1200 traits/mm recouvert d'aluminium.

———— *Courbes expérimentales.*

— — — *Courbes théoriques obtenues en supposant le métal infiniment conducteur et en adoptant le profil de la figure 20.*

Des essais avaient été faits auparavant dans ce but et plusieurs procédés techniques avaient été successivement utilisés. La figure 19 est une photographie au microscope électronique réalisée au Laboratoire de Physique Cristalline de la Faculté des Sciences de Saint-Jérôme (Marseille) selon un procédé voisin de celui décrit dans [47] .

Pour obtenir le profil représenté au bas de la figure 20, le Laboratoire Zeiss d'Oberkochen, a photographié le réseau au microscope électronique sous deux angles différents, selon la méthode de stéréoscopie [48] . La restitution du profil a été faite à l'Institut Géographique National.

Figure 19 - Photographie du profil au microscope électronique.

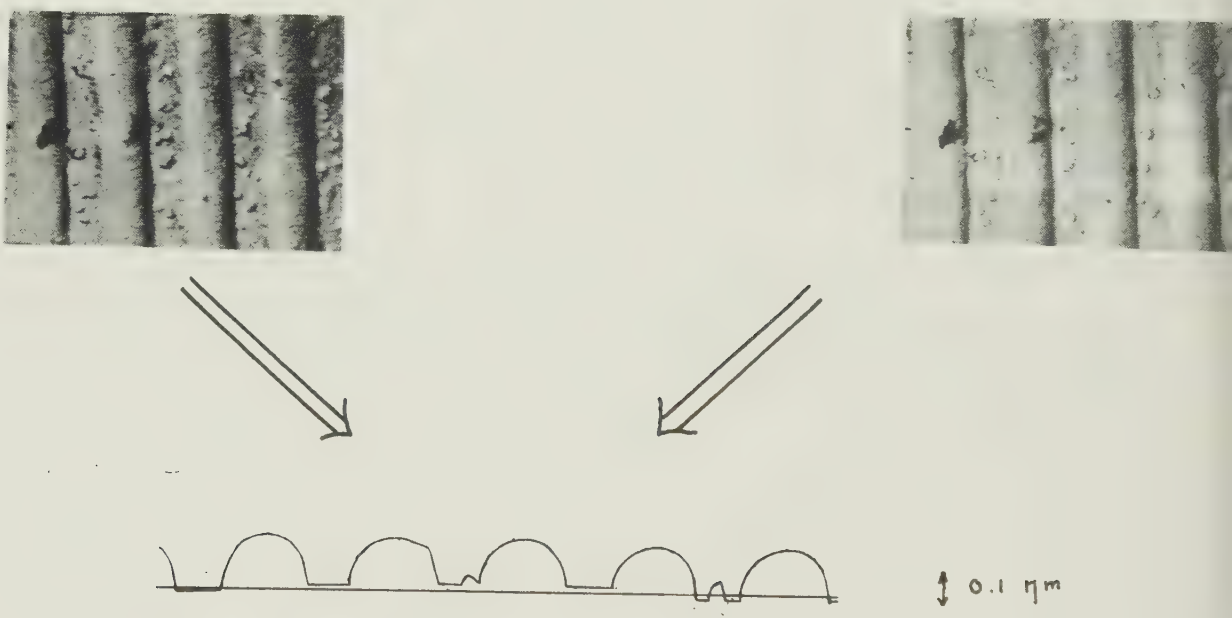


Figure 20 - Profil obtenu par stéréoscopie.

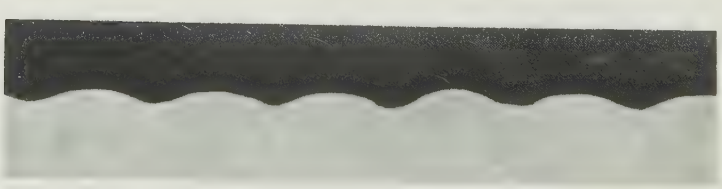


Figure 21 - Photographie du profil au microscope à balayage.

La figure 21 est une photographie réalisée avec un microscope à balayage (scanning) au L E T I du C. E. N. de Grenoble, grâce à des répliques du réseau réalisées chez Jobin-Yvon. On constate malheureusement l'échec de cette dernière technique, faute semble-t-il d'une résolution suffisante. Par ailleurs, les profils figurant sur les figures 19 et 20 sont quantitativement très éloignés : la hauteur du réseau peut être successivement évaluée à 0,11 µm et 0,14 µm.

Le doute était donc de rigueur. La connaissance du profil de notre réseau se révélait très ardue et les moyens techniques qui avaient si bien réussi pour le réseau échelette se révélaient maintenant insuffisants, sans doute en raison de la plus petite valeur du pas, ici inférieur au micron.

Toutefois, des calculs avaient déjà été faits, en supposant naturellement le réseau infiniment conducteur et en lui donnant successivement l'un des profils figurant sur les figures 19 et 20. Ces tentatives s'étaient soldées par un échec, surtout dans le cas H //, ainsi qu'on peut le constater sur la figure 18. L'introduction d'une conductivité finie n'a pu améliorer l'accord entre l'expérience et la théorie. Ces travaux n'ont pourtant pas été inutiles. Tout d'abord, ils nous ont permis de connaître de façon qualitative la forme du profil d'un réseau holographique et de commencer une étude théorique de l'efficacité de ce type de réseau. Enfin, ils nous ont convaincus qu'un accord entre la théorie et l'expérience ne serait jamais réalisé sans une connaissance très précise du profil d'un réseau holographique.

C'est récemment, et grâce à la venue dans le laboratoire du chercheur R. C. Mc Phedran, que nous avons eu connaissance des travaux expérimentaux de M. C. Hutley [49, 50] . Construisant des réseaux holographiques, il affirmait pouvoir en déterminer le profil, grâce en particulier à l'emploi d'un Talystep [49] .

La figure 22 représente par exemple le profil mesuré d'un réseau holographique de 830 traits/mm, on notera son allure très proche de la sinusoïde parfaite.

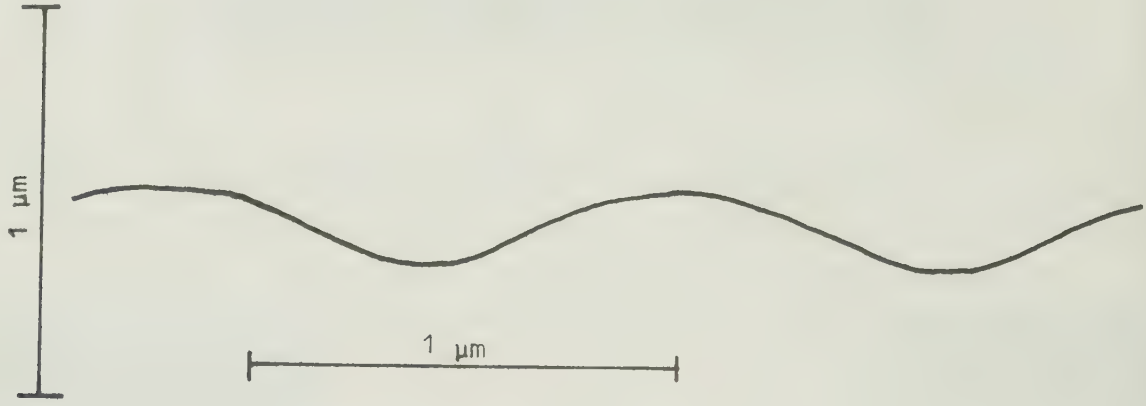


Figure 22 - Profil d'un réseau holographique donné par un talystep.

La théorie du réseau infiniment conducteur utilisée par M. C. Hutley pour prévoir les performances de ses réseaux était en bon accord avec l'expérience dans le cas E // ,

Par contre, dans le cas H //, l'échec était total. Nous pouvions donc considérer ce demi-échec comme un argument en faveur de nos prévisions théoriques sur l'insuffisance du modèle de la conductivité infinie dans le visible. Il était facile de trancher en utilisant nos programmes. Pour cela, après avoir mesuré la hauteur du réseau sur la figure 22, nous lui avons donné dans les calculs, l'indice de l'argent évaporé [51] , en lui supposant un profil sinusoïdal, et nous avons tracé les courbes d'efficacité théoriques à longueur d'onde constante, correspondant à celles de la figure 7 de [50] .

Ainsi qu'on peut le constater sur la figure 23, le résultat est particulièrement probant. Dans le cas H //, le doute n'est plus permis et la condamnation de l'ancienne théorie est sans appel.

Il suffira de noter par exemple que pour l'incidence de 42° où l'efficacité du réseau chute pratiquement à 0 dans le cas H //, l'énergie totale diffractée dans le vide par le réseau ne représente grossièrement que la moitié de l'énergie incidente. Ce phénomène, constaté expérimentalement par M. C. Hutley, ne peut manquer de surprendre quand on sait que l'argent pour $\lambda_0 = 0{,}521\ \mu m$ a une réflectivité égale à 98 % et que le réseau dont nous venons d'étudier les propriétés a une hauteur inférieure au sixième du pas ! L'explication et la prévision de ce paradoxe est à l'heure actuelle, à notre sens, un des problèmes les plus passionnants de l'étude des réseaux.

On peut être étonné par l'accord immédiat que nous avons obtenu entre la théorie et l'expérience ; il ne faut pas oublier qu'aux erreurs des mesures photométriques s'ajoute l'imparfaite connaissance du profil et même de l'indice du métal. Bien d'autres comparaisons entre la théorie et l'expérience ont été faites à la suite de ce premier travail [52, 53] , pour des réseaux recouverts d'argent, d'aluminium ou d'or. Si l'accord n'a pas toujours été aussi satisfaisant, nous avons pu montrer que la cause en est généralement une distorsion importante, mais mal connue, du profil, par rapport à la sinusoïde parfaite. On a pu constater aussi que les remarques faites pour le réseau d'argent se généralisent aux réseaux d'aluminium, en particulier pour l'existence de zones de forte absorption.

On peut noter sur la figure 23 l'allure presque symétrique des courbes, l'axe de symétrie correspondant à la longueur d'onde où l'ordre diffracté a même direction que l'ordre incident (Littrow). C'est cette remarque, suggérée par R. C. Mc Phedran, qui nous a inclinés à penser que le théorème de réciprocité pouvait se généraliser aux réseaux de conductivité finie.

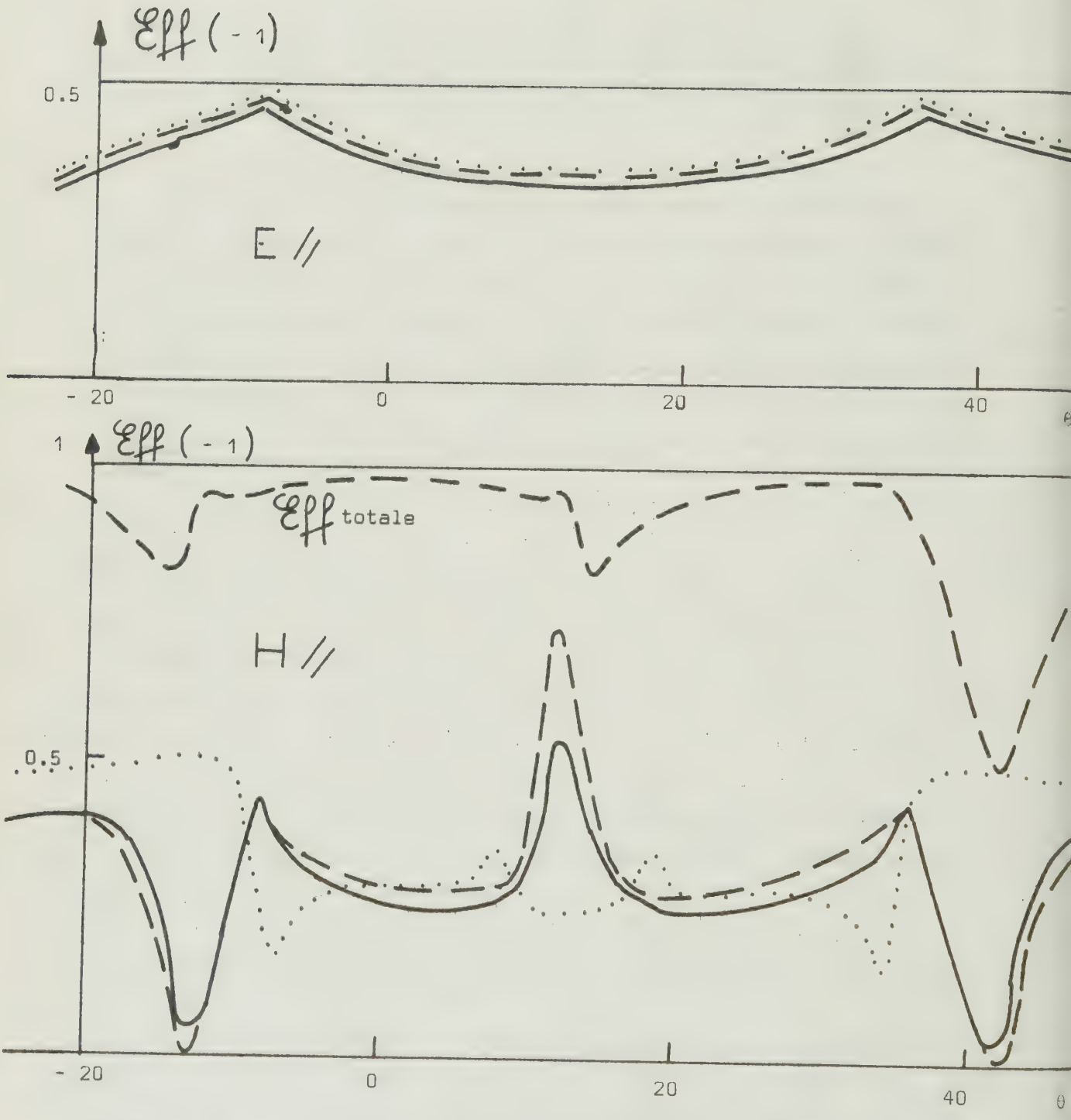


Figure 23 - Courbes d'efficacité expérimentales et théoriques d'un réseau holographique de 830 traits/mm employé à longueur d'onde constante égale à 0,521 µm.

———— Courbe expérimentale,

— — — Courbe théorique du réseau d'argent

. . . . . Courbe théorique du réseau parfaitement conducteur.

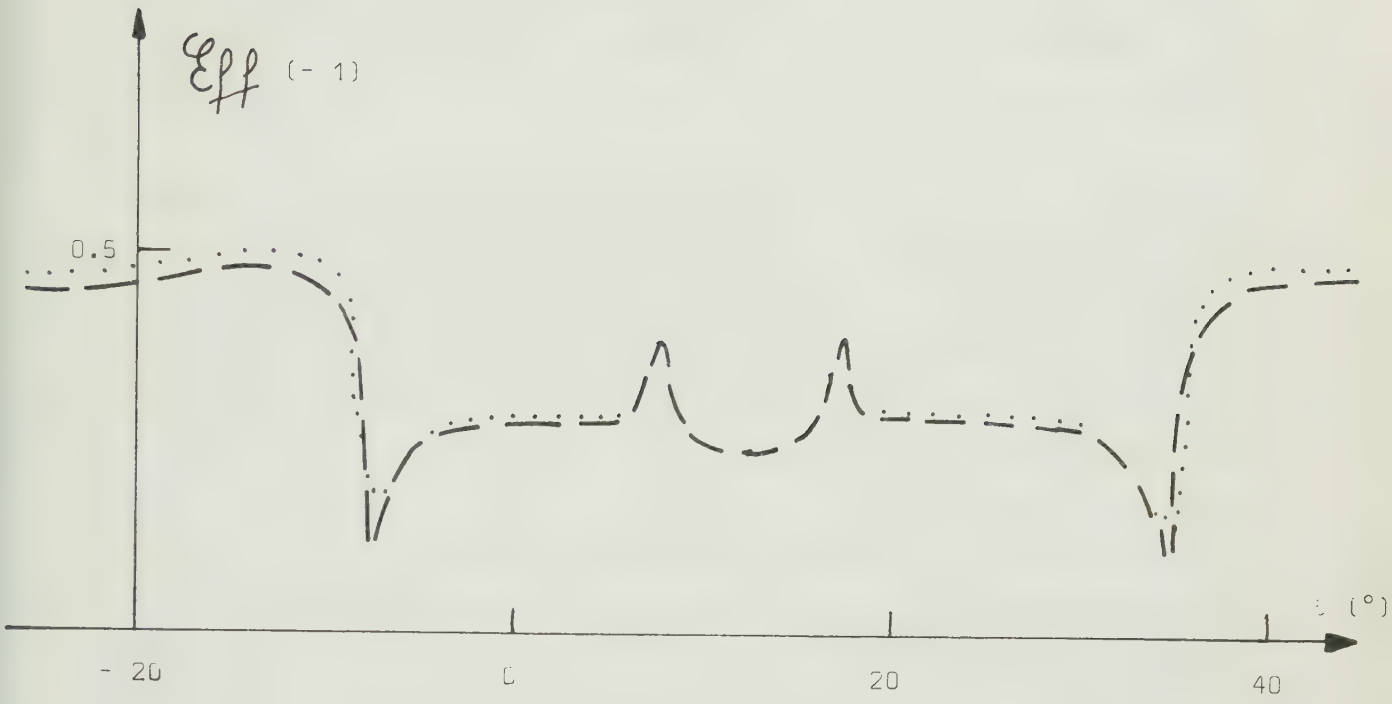


Figure 24 - Courbes d'efficacité théoriques en H // reprenant les conditions de la figure 23.

— — — Courbe théorique obtenue en donnant au réseau l'indice de l'aluminium à 4 µm.

. . . . . Courbe théorique du réseau parfaitement conducteur.

Ces courbes théoriques seraient aussi celles obtenues en utilisant le réseau de 109 traits/mm déduit de celui-ci par homothétie, recouvert d'aluminium et éclairé à la longueur d'onde constante de 4 µm.

Les remarques qui précèdent posent une nouvelle question : puisque l'aluminium ou l'argent ne doivent pas être considérés infiniment conducteurs dans le visible, à partir de quelle longueur d'onde cette hypothèse devient-elle légitime?. La figure 24 apporte une réponse à cette question.

On a gardé le même réseau que pour la figure 23, mais l'indice est celui de l'aluminium à 4 µm. Les courbes obtenues en lui donnant l'indice de l'argent à 4 µm seraient pratiquement confondues avec celles-ci. De toute évidence, on peut, sans grande erreur, à partir de 4 µm, considérer que ces deux métaux bénéficient des propriétés d'un métal parfaitement conducteur.

Ainsi donc, l'étude des propriétés des réseaux recouverts d'aluminium nécessite la séparation de trois zones bien distinctes de longueurs d'onde.

Dans l'ultra-violet situé en-dessous de 1000 Å, l'aluminium a des propriétés très différentes d'un métal infiniment conducteur, quelle que soit la polarisation. La présence sur les réseaux d'aluminium d'une couche protectrice de fluorure de magnésium qui dans ce domaine est très absorbant, conduit à utiliser des réseaux recouverts d'or. Les études théoriques faites par la suite adoptent systématiquement cette hypothèse. Il faut noter la difficulté d'une étude des réseaux dans cette vaste zone. Si aujourd'hui elle prend beaucoup d'importance en raison du développement de l'Optique Spatiale, elle fut dans le passé peu explorée par les opticiens utilisant des réseaux, au point qu'on semble même ignorer les types de montages susceptibles de fournir les meilleures efficacités.

Dans l'infrarouge situé au-dessus de 4 µm, l'aluminium (ainsi que l'argent) peut être considéré parfaitement conducteur quelle que soit la polarisation. Cette région ne pose donc aucun problème nouveau et le lecteur intéressé pourra se reporter aux courbes d'efficacité relatives au métal infiniment conducteur que nous donnons par la suite.

Dans la zone intermédiaire définie par $0{,}1\ \mu m < \lambda_0 < 4\ \mu m$ et où c'est précisément l'aluminium qui recouvre généralement les réseaux,† on peut énoncer quelques règles. Dans le cas E //, on pourrait presque considérer que l'aluminium est parfaitement conducteur. Loin des zones "d'anomalies" où l'efficacité est très sensible à une légère variation des paramètres, on ne commetrait pas de grosse erreur en déduisant la courbe d'efficacité du réseau d'aluminium de celle du réseau parfaitement conducteur par une affinité tenant compte de la réflectivité du métal. Dans l'autre cas fondamental, le passage du métal infiniment conducteur à l'aluminium s'accompagne d'un bouleversement de la courbe d'efficacité, surtout dans les zones "d'anomalies" où généralement, on constate à la fois une diminution de l'amplitude des brusques variations d'efficacité, mais aussi malheureusement leur multiplication.

† On suppose toujours que la mince couche protectrice de MgF_2 n'a pas d'influence notable sur l'efficacité. Ceci a été vérifié par M. Nevière [54] dans le cas E //. Bien qu'aucune étude semblable n'ait pu être faite dans le cas H //, la comparaison de nos prévisions théoriques avec les courbes expérimentales de M. C. Hutley peut laisser penser que généralement la même conclusion peut être formulée.

1) ETUDE DU RESEAU ECHELETTE DE CONDUCTIVITE INFINIE DANS UN MONTAGE A DEVIATION CONSTANTE.

Longtemps, les réseaux échelettes ont été les seuls réseaux utilisés en optique. En prenant l'hypothèse d'une conductivité infinie, des calculs ont été faits il y a plusieurs années par R. Petit [3], si bien qu'à notre arrivée au laboratoire, les propriétés de ce type de réseau étaient déjà bien connues. Toutefois, dans le cas H //, des difficultés théoriques subsistaient, en raison de la nécessité d'une "renormalisation". C'est pourquoi un de nos premiers travaux consista à élaborer des programmes numériques très semblables à ceux de R. Petit, mais utilisant les équations à noyaux non singuliers proposées par J. Pavageau et J. Bousquet [5]. En effet, après étude numérique, la méthode employée par R. Petit et aboutissant à une inversion de matrice nous parut préférable à la méthode "itérative" proposée par J. Pavageau et J. Bousquet et dont la convergence nous semblait être trop aléatoire. Le but de ces nouveaux programmes était d'entreprendre une étude numérique systématique de l'efficacité des réseaux classiques employés dans les montages courants des opticiens, c'est-à-dire les montages à déviation constante. Les résultats figurent dans l'annexe P 2. Il est important de noter qu'au moment où ces calculs ont été faits, les études numériques exposées au chapitre III n'avaient pas encore débuté ; par suite, la précision et la durée des calculs s'en ressentaient durement. En particulier, certaines "anomalies de Wood" n'avaient pas été suffisamment bien cernées, on pourra en trouver la preuve dans la comparaison avec la figure 30 a, tracée après utilisation de nos derniers programmes. Le lecteur intéressé par les performances des réseaux classiques infiniment conducteurs au voisinage d' "anomalies" pourra se reporter à [55] .

CHAPITRE V

RESULTATS NUMERIQUES,

APPLICATIONS PRATIQUES A LA SPECTROSCOPIE

ET AU FILTRAGE DES LONGUEURS D'ONDE

2) ETUDE DU RESEAU DE PROFIL QUELCONQUE ET DE CONDUCTIVITE INFINIE EMPLOYE DANS UN MONTAGE A DEVIATION CONSTANTE.

Quand, il y a quelques années, la firme Jobin-Yvon commença à produire des réseaux holographiques en réalisant des interférences sur une surface plane recouverte de résine photopolymérisable [56] , il nous parut clair que le prix de revient de ces réseaux deviendrait bien inférieur à celui des réseaux échelettes. La question essentielle, telle qu'elle nous fut posée par Jobin-Yvon [57] était de savoir si les performances de ces réseaux seraient compétitives avec celles des réseaux classiques. Nous n'avions pas la possibilité de calculer l'efficacité d'un réseau de conductivité finie et pensions,à tort, que l'aluminium déposé à la surface des réseaux pouvait être considéré infiniment conducteur. C'est sur ces bases, compte tenu des photos au microscope électronique et des restitutions stéréographiques qui permettaient d'avoir l'allure qualitative du profil (figures 19, 20 et 21) que l'étude fut entreprise.

Un premier travail consistait à adopter un modèle pour représenter le profil. Au début, une "cycloïde raccourcie" ayant subi une affinité verticale nous parut convenir (annexe P 3). On a ainsi étudié l'influence de la profondeur des sillons (annexe P 3). Cependant, on s'est rapidement aperçu que ce modèle ne permettait guère de s'écarter d'un profil parfaitement sinusoïdal. Or, après discussion avec le constructeur, il apparaissait que le rapport de la profondeur des sillons au pas du réseau était limité à un chiffre inférieur à 0,2 ; par suite, le paramètre important était la largeur des sillons à mi-profondeur, autrement dit le rapport des dimensions de la "bosse" et du "trou". C'est pourquoi, après avoir vérifié numériquement que pour un profil réel donné, le choix du modèle appelé à le représenter était peu important pour les courbes d'efficacité (annexe P 4), nous avons opté pour le modèle plus souple utilisant quatre segments de droite dont deux horizontaux (annexe P 4). La conclusion principale de l'étude de l'influence de la largeur à mi-hauteur était fort simple :

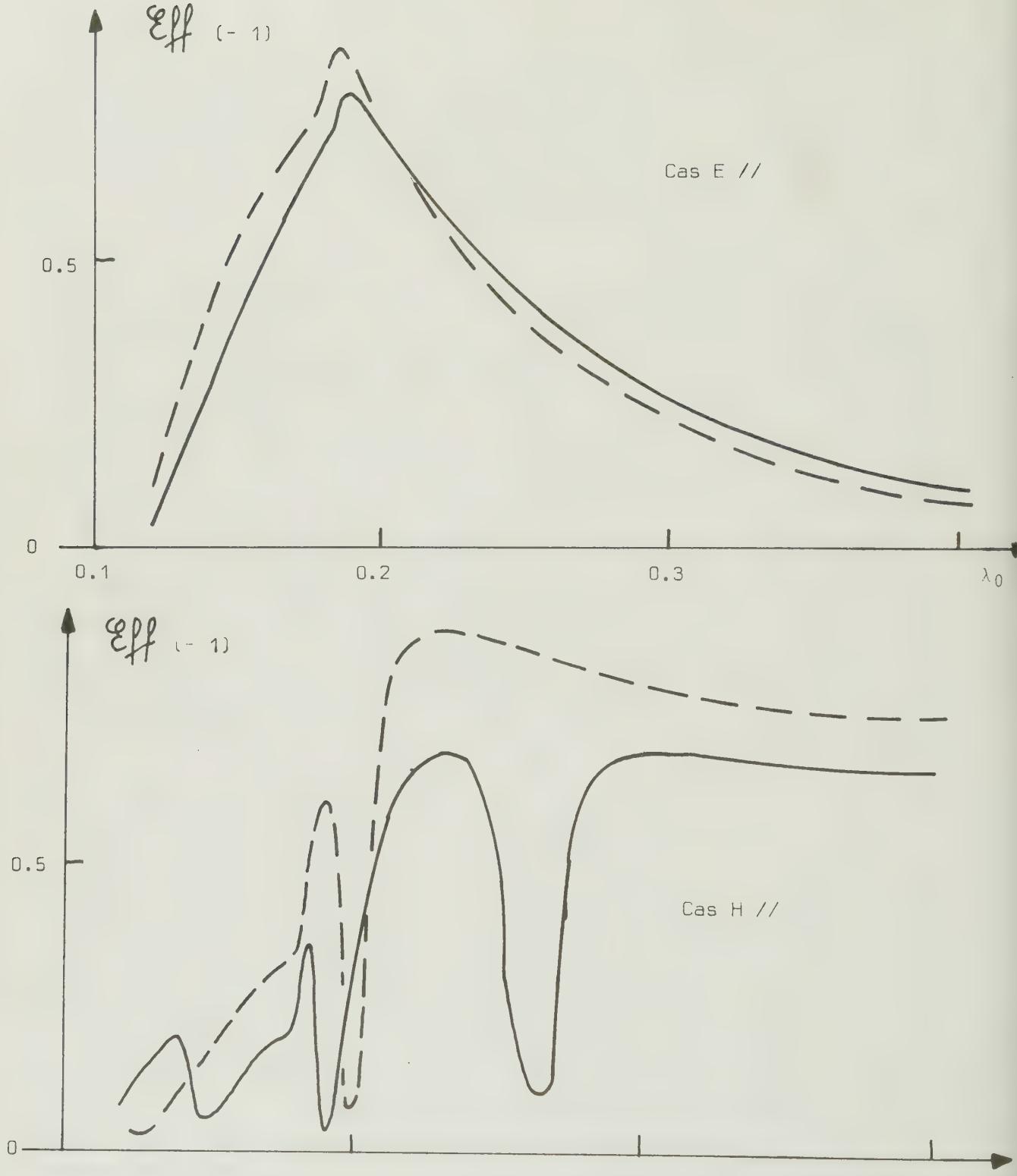


Figure 25 - Influence d'une conductivité finie sur l'efficacité théorique d'un réseau holographique de 3600 traits par millimètre,

— — — réseau infiniment conducteur,

———— réseau d'aluminium.

à hauteur et pas fixé, le meilleur réseau pour l'efficacité en montage de Littrow semblait être indiscutablement celui dont le profil était le plus proche d'une sinusoïde (annexe P 4). Cette conclusion, évidemment très simpliste, avait à ce moment là l'intérêt de donner un point de repère aux constructeurs qui en manquaient alors singulièrement, compte tenu de la diversité des paramètres nécessaires pour décrire le profil d'un réseau holographique. Nous savons maintenant que cette étude est à reprendre, compte tenu de la conductivité finie du métal. Pour s'en convaincre, il suffit de se reporter à la figure 25 où on peut juger de l'influence d'une conductivité finie (celle de l'aluminium) sur un réseau de 3600 traits par millimètre ayant le profil du réseau qualifié d' "optimal" dans l'annexe P 4 (figure 5 d de P 4). On doit remarquer dans le cas H // la présence de zones de forte absorption qui n'existaient pas sur la courbe correspondante de l'annexe P 4. L'étude des propriétés des réseaux holographiques dans le visible et le proche ultra-violet doit donc repartir sur de nouvelles bases. Ce travail figure parmi les objectifs de R. C. Mc Phedran qui, au laboratoire, dispose actuellement de nos programmes numériques.

3) INTERET DE LA DIFFRACTION CONIQUE POUR LES RESEAUX INFINIMENT CONDUCTEURS.

Dans l'annexe P 7 est exposé le principe d'un spectromètre à réseau dont l'efficacité est constante. L'idée de départ de ce montage repose sur le théorème d'invariance exposé au I. 5. 1. A la suite de cette idée, de nombreux problèmes techniques se sont posés. En particulier, nous avons du imaginer un montage permettant la fixité de l'image de la fente d'entrée. Un des mérites de ce travail a été de nous faire toucher les aspects pratiques de l'utilisation des réseaux de diffraction. Nous avons été amenés à faire une demande de brevet d'invention à l'A. N. V. A. R.

Malheureusement, et à notre grande stupéfaction, les recherches d'antériorité ont montré qu'un brevet, déposé voici plus de dix ans par un chercheur américain, recouvrait pratiquement notre projet [58].

En consultant ce brevet, il nous semble que l'auteur, vraisemblablement expérimentateur, a proposé ce montage en ignorant le théorème d'invariance qui a été notre point de départ et dont ce montage n'est finalement qu'une application particulière. Dans ses propres termes, il s'agissait alors pour lui d' "élargir l'effet de blaze". En présence de plusieurs expérimentateurs, nous avons constaté qualitativement l'exactitude des propriétés avancées, en particulier la fixité de l'image de la fente d'entrée et la concentration de l'énergie diffractée dans l'ordre - 1, quelle que soit la longueur d'onde. Des calculs numériques onté été faits pour connaître, dans le plan focal de sortie, le lieu géométrique des images des points situés sur la fente d'entrée supposée infiniment fine. Il est alors apparu que, au sens de la linéarité de ce lieu géométrique, ce montage est supérieur aux montages classiques. Grâce à l'aide expérimentale du Laboratoire d'Optique de la Faculté des Sciences de Saint-Jérôme et avec un réseau échelette de 610 traits par millimètre et ayant 34° pour angle de blaze; nous avons pu vérifier quantitativement, dans le visible, la propriété d'invariance de l'efficacité dans les deux cas de polarisation. Le tableau ci-après donne le résultat de nos mesures d'efficacité en lumière naturelle pour quelques longueurs d'onde;

Efficacité en lumière naturelle dans un montage de diffraction conique

$\theta = 13°$

λ_0 (µm)	ξ (°)	Efficacité (- 1)
0,7	21	0,62
0,65	30	0,60
0,6	37	0,62
0,55	43	0,64
0,5	48	0,66
0,45	53	0,68
0,4	58	0,64
0,35	62	0,61
0,3	66,5	0,60

sachant que le blaze annoncé par le contructeurs est de 70 % vers λ_0 = 7500 Å, l'expérience nous semble particulièrement probante.

Il faut remarquer que, pour ce type de montage, l'aluminium qui recouvre le réseau semble, dans le visible, avoir des propriétés proches de celles du métal parfaitement conducteur. Des calculs numériques effectués pour un réseau sinusoïdal employé dans le visible permettent grossièrement de confirmer cette remarque (figure 26), malgré la présence d'une zone d'absorption autour de λ_0 = 0,21 µm.

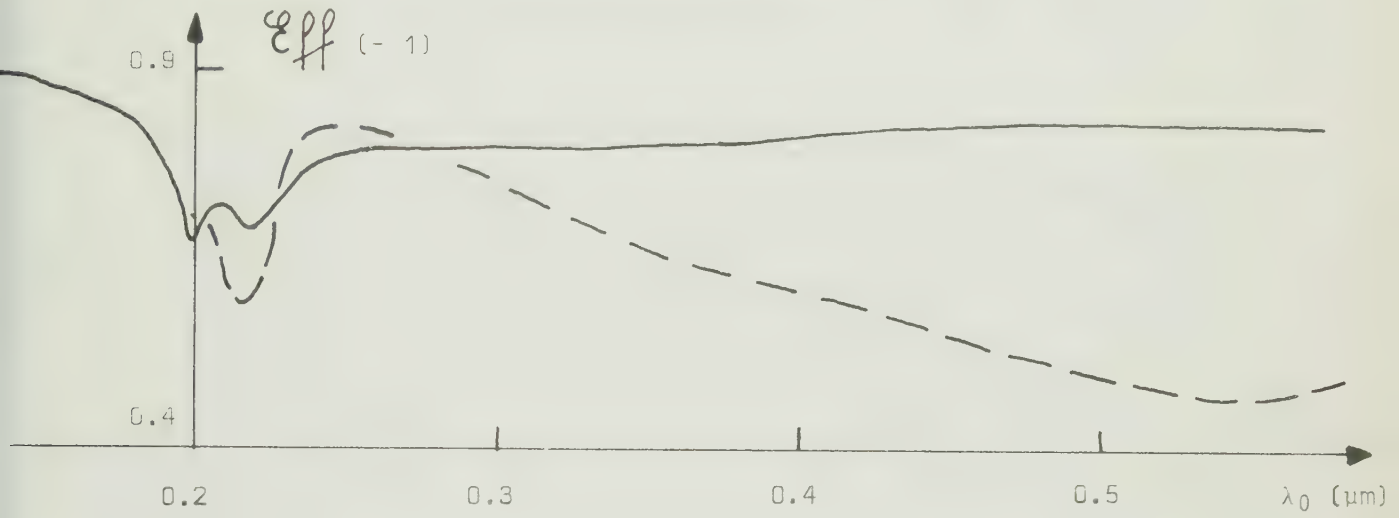


Figure 26 - Efficacité dans un montage de diffraction conique d'un réseau sinusoïdal d'aluminium comptant 1200 traits par millimètre ;

θ = 20° , h = 0,24 µm

——— *cas* $H_\perp$

— — — *cas* $E_\perp$

Il ne semble pas que ce montage soit utilisé par les opticiens et nous pensons que c'est regrettable. La réalisation pratique d'un tel spectromètre serait sans doute le meilleur moyen pour convaincre et c'est pourquoi ce projet nous tient particulièrement à coeur. Nous pourrons voir

cependant à la fin de ce chapitre qu'il n'est pas impossible que l'ultra-violet soit, en fin de compte, le domaine spectral où ce montage puisse fournir les plus spectaculaire résultats.

4) UTILISATION DES PROPRIETES DES RESEAUX AU FILTRAGE DES LONGUEURS D'ONDE

L'annexe P 8 contient une proposition pour la réalisation d'un filtre de longueur d'onde à 4 réseaux. Le montage s'appuie sur une propriété simple et bien connue des réseaux infiniment conducteurs : dans le cas H //, si pour une incidence θ fixée, on fait croître λ_0 , l'efficacité dans l'ordre 0 passe très rapidement de 0 à 1 au voisinage de $\lambda_0 = d(1 + \sin\theta)$ [20, 59] . Cette propriété est bien mise en évidence sur la figure 1 de l'annexe P 8 où l'on remarque par ailleurs l'existence d'un pic d'efficacité pour $\frac{\lambda_0}{d} \simeq 1$. L'efficacité demeure pratiquement égale à 0 entre le pic et l'échelon; cette propriété n'est pas générale, ce sont les théorèmes du chapitre I et des considérations intuitives qui nous ont amenés à chcisir un réseau échelette dont l'angle de blaze (38°) est le complémentaire de la valeur de l'incidence (52°). Nous avons montré que pour le réseau holographique infiniment conducteur, l'efficacité dans l'ordre 0 subissait aussi cette brusque variation (annexe P 4). On peut remarquer, à la lumière du théorème d'invariance du I. 5. 1. qu'il serait plus astucieux dans les montages des figures 3 et 5, de faire tourner les réseaux autour d'axes perpendiculaires aux sillons, de telle manière que, θ_1 et θ_2 ne variant pas, les valeurs des angles d'écart ξ_1 et ξ_2 fixent les limites du filtrage. Il s'agit donc bien d'un filtre de lumière polarisée, la courbe de filtrage étant très proche d'un créneau de position et de largeur variable. Comme ce montage fait appel aux propriétés des réseaux infiniment conducteurs, on peut penser qu'il peut être appliqué au filtrage dans l'infrarouge au-dessus de 4 μm.

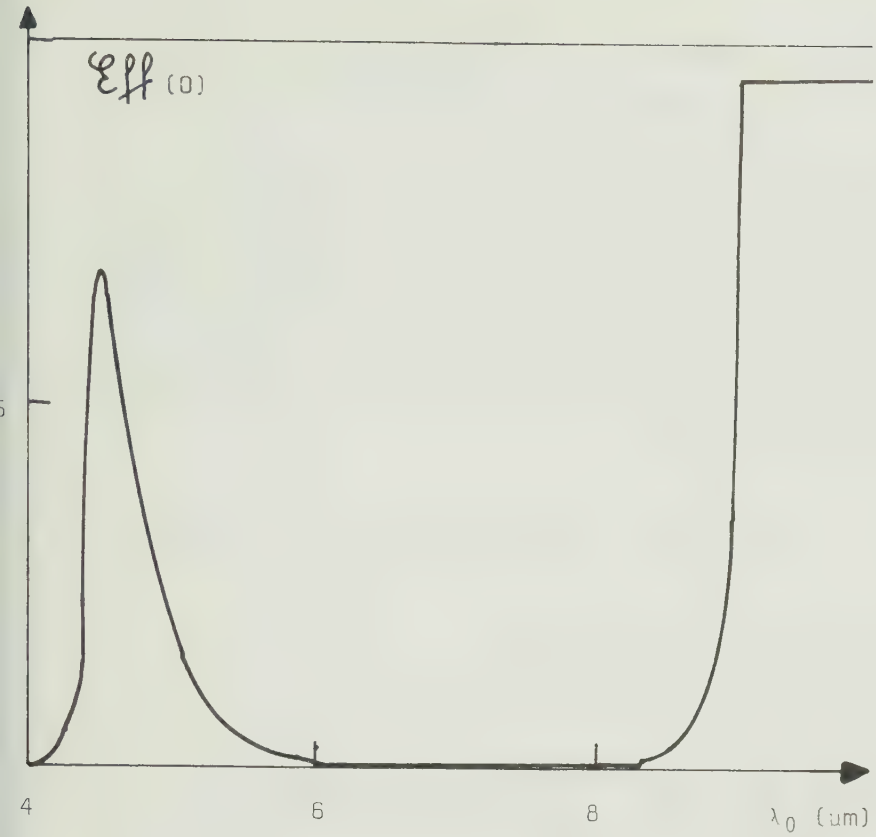


Figure 27 -

Efficacité dans l'ordre 0 et dans le cas H // d'un réseau échelette de 200 traits par millimètre recouvert d'aluminium ; l'angle de blaze est égal à 38° et l'incidence à 52°.

Figure 28 -

Efficacité dans l'ordre 0 et dans le cas H // d'un réseau échelette de 2000 traits par millimètre recouvert d'aluminium ; l'angle de blaze est égal à 38° et l'incidence à 52°.

C'est ce que l'on peut constater sur la figure 27 qui reprend la même configuration que celle utilisée pour la figure 1 de l'annexe P 8, le pas du réseau recouvert d'aluminium ayant été fixé à 5 µm. Par contre, si le pas est fixé à 0,5 µm (figure 28), on doit constater que la courbe est moins anguleuse, toutefois le principe du montage ne semble pas être mis en cause. Si la proposition est spécialement intéressante dans l'infrarouge, c'est parce que dans ce domaine, le profil des réseaux peut être réalisé avec précision et que les techniques de filtrage sont sans doute moins avancées que dans le visible.

Ce montage a fait l'objet d'une demande de brevet d'invention.†

5) ETUDE DES RESEAUX LAMELLAIRES ET CRENEAUX INFINIMENT CONDUCTEURS.

Nous avons été intéressés par un problème lié à la technologie des circuits intégrés. Ce problème, posé par des ingénieurs de la C. S. F. [60] concerne l'étude du champ transmis par une structure comprenant un réseau lamellaire et des couches de divers matériaux. On en trouve une description détaillée dans l'anne P 9. Pour nous, l'intérêt de l'étude résidait essentiellement dans un fait : pour la première fois, l'étude du champ au voisinage du réseau présentait un intérêt pratique. Nous avons réalisé, dans le cas E //, les programmes concernant la diffraction d'un réseau lamellaire ou créneau placé dans le vide (annexe P 1). L'adaptation au cas H // a été faite par J. L. Roumiguière, thésard troisième cycle, qui s'est vu confier aussi la généralisation de tous ces programmes afin de pouvoir traiter un problème pratique posé par la C. S. F. (annexe P 9). Dans cette dernière étude, l'aide de M. Cadilhac a été déterminante

† A. N. V. A. R., n° 72 07 310 , 22 février 1972.

dans la partie numérique.

Ce travail, qui va être soutenu par la D. R. M. E. est en cours. Dores et déjà, des conclusions intéressantes ont pu être dégagées : comme on pouvait s'y attendre, les lois de l'Optique géométrique sont souvent prises en défaut. Une communication sera faite à ce sujet au cinquième colloque des ondes micrométriques (Budapest, Juin 1974).

6) ETUDE DES RESEAUX EMPLOYES EN DIFFRACTION CLASSIQUE DANS L'ULTRA-VIOLET.

Avant notre participation à l'I. C. O. 9 (Santa Monica), nous pensions que les programmes concernant les réseaux de conductivité finie seraient utilisés exclusivement dans le visible et le proche ultra-violet. L'étude des performances des réseaux dans ce domaine ne paraissait pas entraîner de grandes difficultés. En effet, la bonne réflectivité de l'aluminium et les possibilités des réseaux holographiques (qui peuvent aujourd'hui dépasser 6000 traits par millimètre) justifient les montages classiques du type déviation constante actuellement utilisés dans cette zone de longueur d'onde.

Après discussion avec quelques chercheurs, nous fumes convaincus que l'ultra-violet lointain était devenu un domaine usuel pour l'Optique Spatiale [61]. On comprendra quelle fut notre stupeur quand des expérimentateurs évoquèrent devant nous leur projet d'utiliser des réseaux à des longueurs d'onde inférieures à 100 Å ! . Ces informations nouvelles nous incitaient à élargir considérablement nos projets numériques. Il fallait toutefois être prudent. En effet, si l'on veut faire des calculs à $\lambda_0 = 150$ Å , compte tenu des possibilités actuelles des réseaux holographiques, on est obligé d'envisager un rapport $\frac{\lambda_0}{d}$ de l'ordre de $\frac{1}{15}$.

Cette seule constatation aurait indiscutablement suffi pour éliminer irrémédiablement les programmes numériques élaborés avant les études exposées au chapitre III. Une autre difficulté consistait à se procurer les valeurs de l'indice de l'or, métal usuellement employé pour recouvrir les réseaux utilisés à ces longueurs d'onde. Cette dernière difficulté peut être aplanie par une nouvelle communication personnelle de W. R. Hunter. Comme nous allons le voir, à la suite de certaines circonstances, nous avons été rapidement fixés sur les possibilités de nos programmes.

6 -1. UN EXEMPLE D'ETUDE PONCTUELLE DANS L'ULTRA-VIOLET.

En prévision du futur lancement du satellite américain OSO I en 1974, le Laboratoire de Physique Stellaire et Planétaire avait prévu l'étude des raies d'émission solaires entre 150 Å et 1200 Å grâce à l'emploi de réseaux embarqués. On nous a demandé, pour des raisons exposées par la suite, de calculer l'efficacité des réseaux recouverts d'or prévus à cet effet. Nous ne rendons compte ici que des calculs qui nous intéressaient plus particulièrement, c'est-à-dire ceux faits pour des longueurs d'onde inférieures à 500 Å.

Le nombre de traits du réseau ayant été fixé à 3600 par millimètre et la déviation à 144°, l'angle de blaze (8,5°) a été choisi de telle manière que, d'après les règles simples fréquemment utilisées par les opticiens, l'effet de blaze maximal soit observé pour λ_0 = 256 Å et dans l'ordre + 1 (figure 29).

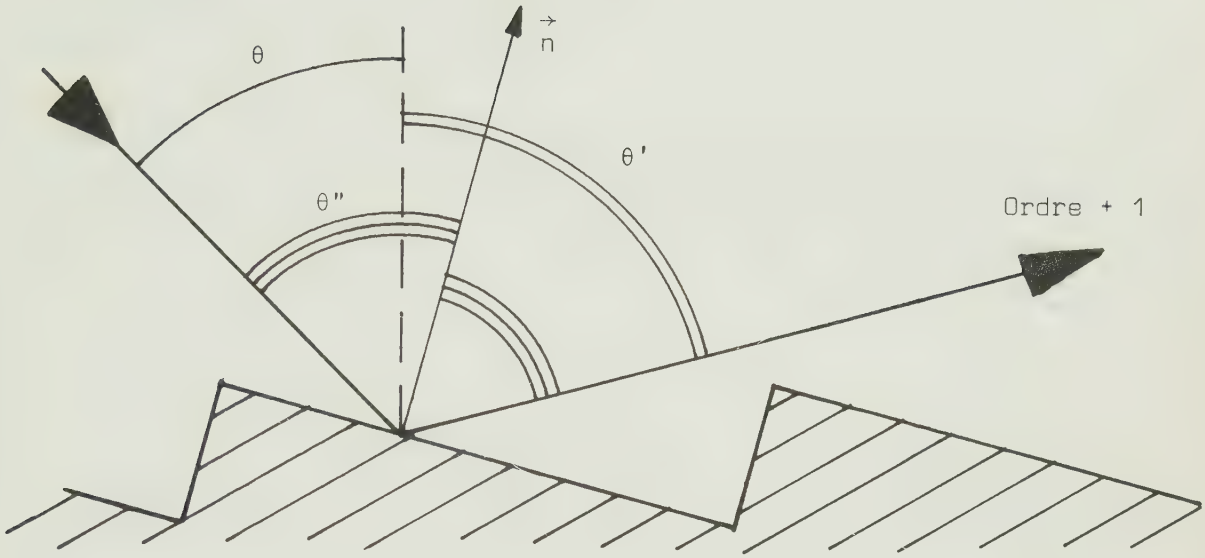


Figure 29 -

Montage utilisé pour une étude dans l'ultra-violet lointain.

Le choix du pas est imposé par les limitations technologiques de la construction des réseaux échelettes. La grande valeur de la déviation, par contre, est motivée par des raisons intuitives. En effet, l'énergie réfléchie par un miroir métallique croit généralement avec l'incidence. Par exemple, à 256 Å, quand l'incidence sur un miroir d'or passe de 0° à 72° (ce qui est, dans le montage que nous venons de décrire, la valeur de l'incidence sur la grande facette), l'énergie réfléchie passe de 0,04 à 0,47 dans le cas E //, et de 0,04 à 0,25 dans le cas H //. Le réseau étant construit et placé sur un goniomètre, on s'aperçut que les efficacités mesurées ne correspondaient pas aux espérances des chercheurs qui avaient imaginé le montage. En particulier, les prévisions des théories scalaires [62] se révélaient souvent bien trop optimistes. Par suite, pour certaines valeurs de la longueur d'onde, le seuil d'efficacité nécessaire pour réaliser les expériences n'était pas atteint.

Devant ces difficultés, les firmes Matra et Jobin-Yvon, chargées de la réalisation du réseau, ont pris conseil auprès de notre laboratoire.

Les conditions d'emploi des réseaux, ainsi que nos calculs, sont portés sur les tableaux qui suivent. Ils ont été faits pour quatre longueurs d'onde utiles choisies parmi les plus basses.

Conditions d'emplois

λ_0 en Å	304	256	190,3	164,6
Ordre	1	1	2	2
partie réelle de l'indice.	0,92	0,88	0,901	0,905
partie imag. de l'indice	0,41	0,39	0,104	0,07
incidence θ	61,80	63,40	59,20	60,93
valeur de θ" (fig. 2g)	70,30	71,90	67,70	69,43

Résultats lorsque le champ électrique est parallèle aux traits

λ_0 en Å	Efficacité dans l'ordre utilisé.	Somme des efficacités	Pouvoir réflecteur d'un miroir sous l'incidence θ	Pouvoir réflecteur d'un miroir sous l'incidence θ "
164	0,078	0,099		
190	0,049	0,078		
256	0,174	0,191	0,32	0,47
304	0,146	0,167	0,30	0,44

Résultats lorsque le champ magnétique est parallèle aux traits

λ_0 en Å	Efficacité dans l'ordre utilisé.	Somme des efficacités	Pouvoir réflecteur d'un miroir sous l'incidence θ	Pouvoir réflecteur d'un miroir sous l'incidence θ "
164	0,054	0,071		
190	0,031	0,047		
256	0,090	0,098	0,115	0,25
304	0,069	0,078	0,09	0,21

Généralement, les résultats diffèrent très sensiblement de ceux obtenus à l'aide de la théorie scalaire. Par contre, chaque fois que la comparaison a pu être faite, les résultats obtenus par M. Nevière grâce au formalisme différentiel se sont révélés en excellent accord avec les notres. Malgré tout, ces efficacités théoriques sont souvent supérieures aux efficacités mesurées expérimentalement. Ceci ne doit pas nous étonner, il ne faut pas en effet espérer qu'un réseau échelette de 3600 traits/mm ait un profil parfait.

Au vu des résultats, il est d'abord remarquable que les considérations élémentaires employées pour fixer l'angle de blaze se révèlent fructueuses. Non seulement l'effet de blaze existe, mais surtout il est exceptionnellement important comme le montre la comparaison des colonnes 2 et 3. En donnant au réseau une conductivité infinie, l'effet de blaze serait loin d'être aussi important. Donc, si l'efficacité est faible, c'est incontestablement l'indice de l'or qui en est responsable. Il faut aussi constater, malgré la faible valeur du rapport $\frac{\lambda_0}{d}$, la grande influence de la polarisation, puisque le rapport des efficacités correspondant aux deux cas de polarisation est souvent de l'ordre de deux en faveur du cas E //.

Il était intéressant de comparer les performances du réseau échelette prévu par le L. P. S. P. à celles d'autres réseaux échelettes, de formes voisines, voire des réseaux holographiques (à profils sinusoidaux), compte tenu des impératifs du montage. Une étude approfondie a été faite mais aucun résultat de grand intérêt n'a pu être mis en évidence. La supériorité du réseau échelette est manifeste et ses performances sont pratiquement insensibles aux modifications de l'angle de blaze (de 5° à 12°) ou de l'angle au sommet au voisinage de 90°.

Le nombre d'ondes progressives diffractées par le réseau pour $\lambda_0 = 164$ Å est de l'ordre de 40 ! ..., nous pensons cependant que la

précision est meilleure que 10 %. On notera pour cela que la conservation d'énergie, pour une conductivité infinie, est vérifiée à mieux que 1 % près. Cette constatation, qui démontre l'intérêt des considérations numériques exposées au chapitre III, a été considérée comme très encourageante. Elle montrait en effet que dans l'ultra-violet lointain, pratiquement tous les calculs utiles aux expérimentateurs étaient accessibles à nos investigations théoriques.

Cette conclusion ouvrait donc la voie à une étude des propriétés des réseaux dans l'ultra-violet, compte tenu de l'échec de la théorie scalaire. Une grosse difficulté était à prévoir : la durée, et donc le coût des calculs, qui croit très vite quand le rapport $\frac{\lambda_0}{d}$ devient petit. Nous avons pu bénéficier pour cela d'une aide financière de la S. O. P. E. M. E. A. et du C. N. E. S. L'étude est en cours, l'exploitation des programmes a été confiée à M. Duban et J. Gilewicz. Il est bien évident qu'une étude de l'ultra-violet ne pouvait prétendre immédiatement à la généralité. Une réflexion préliminaire sur quelques calculs était souhaitable pour cerner les cas pouvant intéresser l'opticien. Conformément aux conclusions du quatrième chapitre, nous avons séparé deux zones bien distinctes par leurs propriétés : le proche ultra-violet, situé au-dessus de 1000 Å, et le lointain ultra-violet. Naturellement, les premières études ont concerné celle des deux qui était la plus accessible, le proche ultra-violet.

6 - 2. ETUDE DES RESEAUX DANS LE PROCHE ULTRA-VIOLET ($\lambda_0 > 1000$ Å)

Nous avons vu au quatrième chapitre pourquoi, dans l'étude des propriétés des réseaux, ce domaine nous semble pouvoir être assimilé au visible. Ceci explique que nous ayons supposé les réseaux recouverts d'aluminium. Pour la même raison, nous nous sommes intéressés seulement

au montage de Littrow dans l'ordre - 1. Nous avons fixé le nombre de traits du réseau à 3600 par millimètre, ce qui, au moins pour les réseaux échelettes, constitue aujourd'hui la limite technologique. Cette étude volumineuse a été soumise pour publication [55]. Les figures 30 et 31 sont un exemple des courbes contenues dans cette publication, elles donnent l'efficacité d'un réseau échelette et d'un réseau holographique à profil sinusoïdal en considérant successivement :

a) que le réseau est infiniment conducteur,
b) que le réseau est recouvert d'aluminium.

La bonne valeur des efficacités justifie a posteriori le choix du montage de LIttrow. L'observation des anomalies de Wood confirme les conclusions du quatrième chapitre. On peut ajouter cependant au vu de ces courbes que la supériorité du réseau échelette sur le réseau holographique dans les zones d' "anomalies" n'est peut être pas aussi nette que certains ont pu l'affirmer. Si, dans ce domaine de longueurs d'onde, cette remarque devait se confirmer par la suite, il nous semble que dans sa compétition avec le réseau holographique, le réseau échelette perdrait un atout important.

6 - 3. ETUDE DES RESEAUX RECOUVERTS D'OR DANS L'ULTRA-VIOLET EN DESSOUS DE 1000 Å

Nous avons donné au V. 6. 1. un exemple de travail ponctuel dans ce domaine. D'autres travaux de ce type pourraient être effectués dans l'avenir pour répondre aux questions qui nous seront posées. Cependant, on ne peut raisonnablement se contenter de ce type d'études. On a vu d'autre part qu'une exploration systématique de ce domaine n'était pas envisageable. C'est pourquoi nous avons choisi d'explorer d'abord quelques domaines bien particuliers pour essayer d'en tirer des indications d'ordre général et pour cerner les cas pouvant intéresser les opticiens.

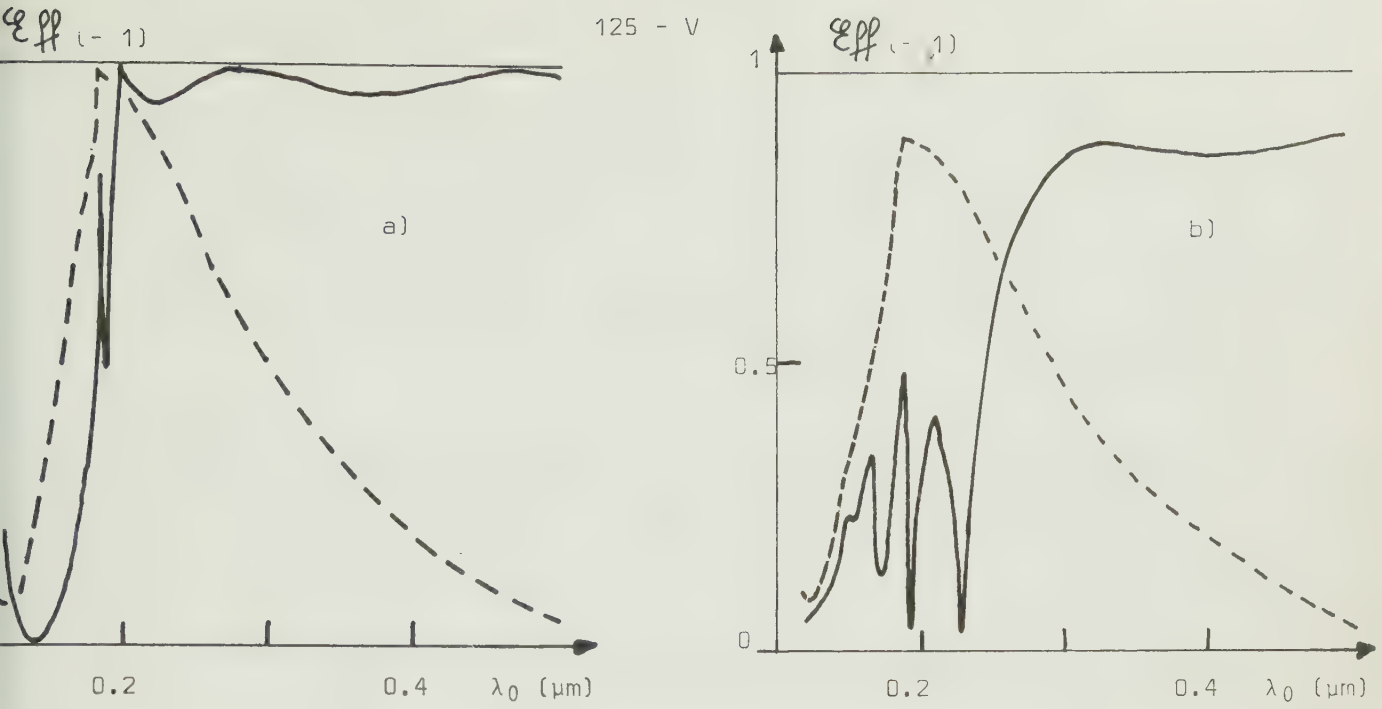


Figure 30 - Efficacités théoriques en Littrow d'un réseau échelette de 3600 traits par millimètre ayant un angle de blaze de 30°.

———— cas H //

— — — — cas E //

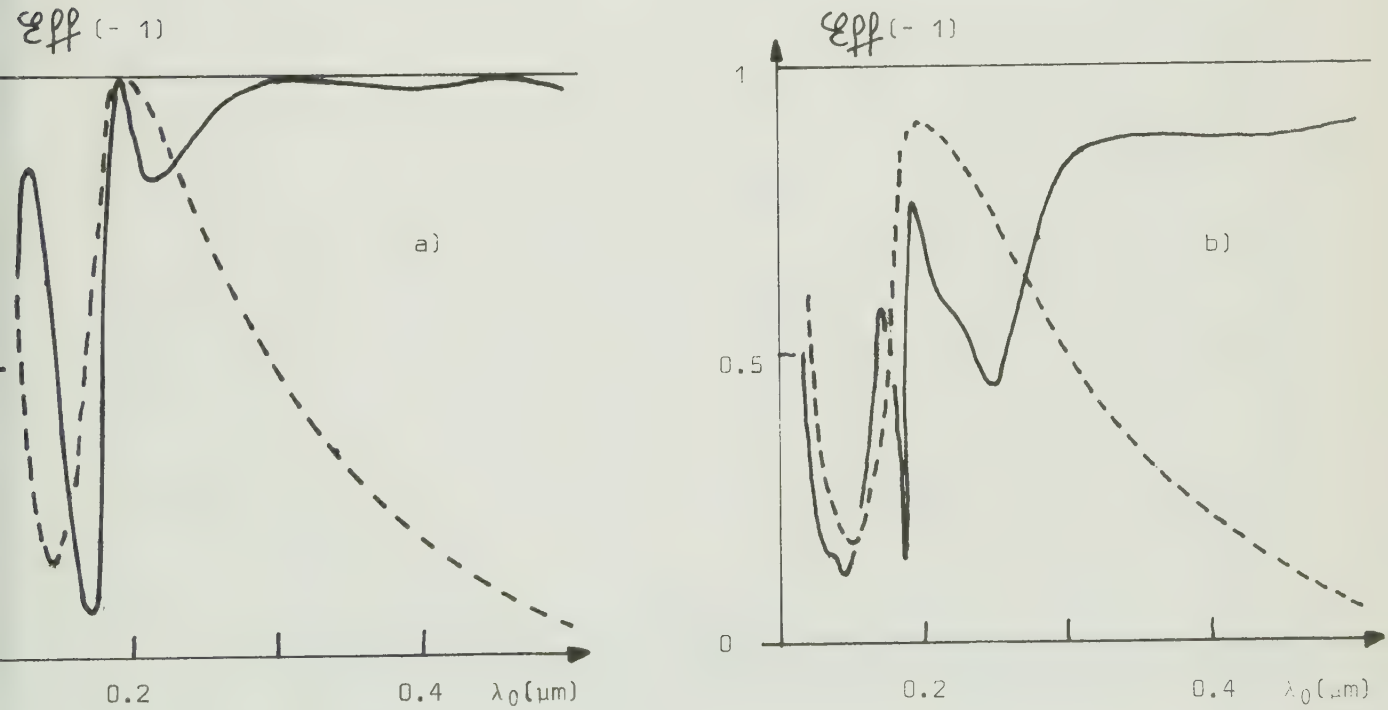


Figure 31 - Efficacités théoriques en Littrow d'un réseau sinusoïdal de 3600 traits par millimètre ayant une hauteur h = 1000 Å.

———— cas H //

— — — cas E //

Pour cela, nous avons étudié le réseau échelette de 3600 traits par millimètre pour deux longueurs d'onde : 744 Å et 584 Å. Pour chacune de ces longueurs d'onde, nous avons donc fait varier l'angle de blaze de 5° à 85° avec un pas de 5°, l'angle d'incidence pouvant prendre toutes les valeurs de 0° à 85° de 5° en 5°. Le temps de calcul total a été de l'ordre de l'heure.

Le tableau ci-dessous porte, pour chaque ordre négatif possible les paramètres donnant l'efficacité maximale en lumière naturelle.

Tableau des efficacités maximales à λ_0 = 584 Å

Ordre	angle de blaze	θ	θ'	θ''_i	θ''_d	Refl. (E //)	Refl. (H //)	Eff. (E //)	Eff. (H //)
- 8	60	60	- 54,7	0	5,3	0,14	0,14	0,106	0,089
- 7	50	55	- 40,7	5	9,3	0,14	0,14	0,106	0,09
- 6	40	40	- 38,2	0	1,8	0,14	0,14	0,116	0,105
- 5	35	15	- 52,4	-20	-17,4	0,16	0,12	0,107	0,072
- 4	25	25	- 24,7	0	0,3	0,14	0,14	0,122	0,114
- 3	20	30	- 7,5	10	12,5	0,14	0,13	0,122	0,102
- 2	15	45	16,7	30	31,7	0,19	0,098	0,145	0,075
- 1	10	65	44	55	54	0,355	0,08	0,211	0,052

On peut se passer d'étudier les ordres positifs grâce au théorème de réciprocité. On constate que les valeurs de $\theta''_i = \theta - \alpha$ et $\theta''_d = \theta' + \alpha$ prennent dans tous les cas figurant ici des valeurs très proches. Ce sont respectivement les angles des directions incidentes et diffractées avec la première facette du réseau (figure 32),

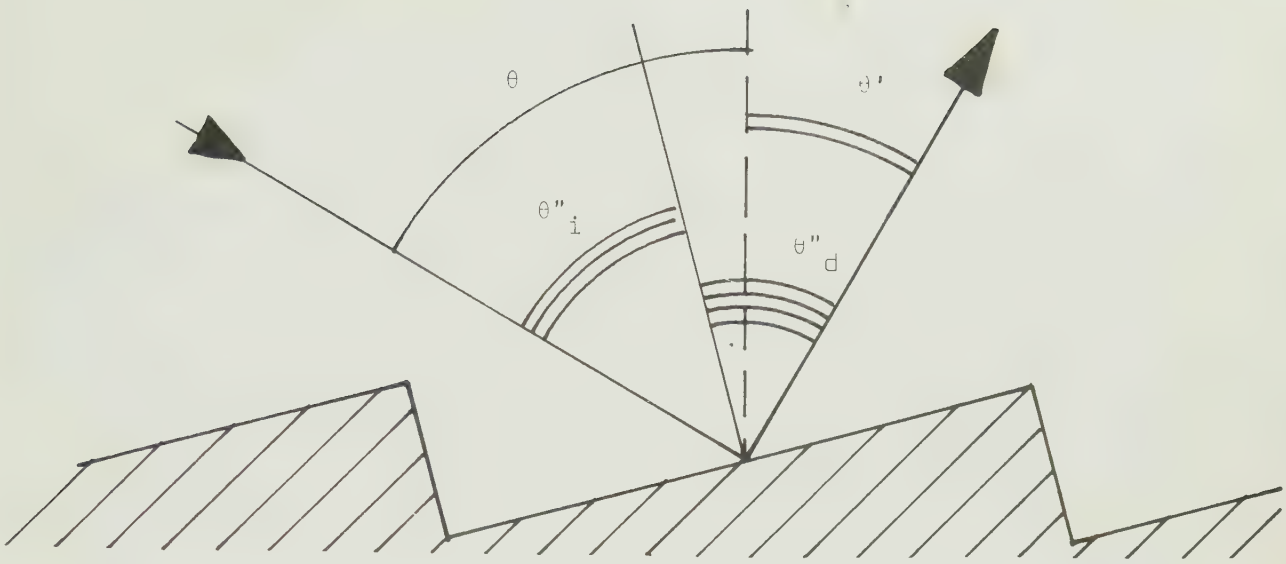


Figure 32 -

$\theta"_i$ et $\theta"_d$ étant positifs sur la figure. Pour obtenir une bonne efficacité dans l'ordre m il faut donc une configuration du type de celle de la figure 32 où le vecteur d'onde diffracté dans cet ordre se déduit approximativement du vecteur d'onde incident par une symétrie sur le plan d'une facette. On peut constater aussi que pour une polarisation donnée, l'efficacité est qualitativement de l'ordre de grandeur de la réflectivité Refl. du miroir d'or sous l'incidence $\theta"_i$. Quantitativement, on peut vérifier que le rapport des efficacités est très proche du rapport des réflectivités. De cette remarque, il vient que les effets de polarisation se font surtout sentir aux angles $\theta"_i$ élevés.

On pourrait croire que cette dernière affirmation devient fausse quand $\frac{\lambda_0}{d}$ devient plus petit. Une étude restreinte à $\lambda_0 = 304$ Å nous permet de penser le contraire ; nous avions d'ailleurs déjà constaté au V. 6. 1. d'importants effets de polarisation à $\lambda_0 = 256$ Å.

Si à 584 Å ou 744 Å, on peut obtenir de bonnes efficacités pour les angles $\theta"_i$ petits, il n'en est plus de même en dessous de λ_0 = 400 Å où la réflectivité du miroir d'or en incidence normale devient inférieure à 0,09. Il faut donc donner à $\theta"_i$ des valeurs suffisamment grandes, ce qui provoque d'importants effets de polarisation, l'efficacité dans le cas H // étant généralement très défavorisée par rapport à celle obtenue dans le cas E //. Ce phénomène est à l'origine des problèmes des chercheurs du L. P. S. P. qui, ainsi que nous l'avons vu au V. 6. 1., avaient utilisé par intuition ce type de montage.

Remarque : Utilisation d'une formule empirique.

Nous venons de voir qu'il est possible d'énoncer, au vu des résultats précédents, des règles qualitatives et quantitatives concernant les efficacités. Dans le type de configuration proposé, où $\theta"_i \simeq \theta"_d$, nous avons essayé de trouver une loi empirique permettant de connaître les efficacités correspondantes aux deux cas de polarisation. Une réflexion sur les résultats des calculs effectués nous amène à proposer pour l'ordre concerné la formule suivante :

$$Eff = \tau \cdot \text{Refl.}$$

où τ, toujours inférieur à 1, est égal à $\frac{\cos\theta}{\cos\theta'}$ ou son inverse,

Refl. étant la réflectivité du miroir d'or sous l'incidence $\theta"_i$ et pour la polarisation qui nous intéresse. Cette formule, particulièrement simple, et qui vérifie de toute évidence le principe de réciprocité si $\theta"_i = \theta"_d$ est actuellement l'objet d'un examen approfondi. On peut essayer de la justifier par des arguments théoriques mais pour nous, sa meilleure justification est le bon accord entre les résultats obtenus grâce à elle et ceux donnés par nos programmes numériques, ainsi qu'en témoigne le tableau suivant.

Comparaison des résultats obtenus grâce à une formule empirique avec ceux donnés par nos programmes

λ_0(Å)	Angle de blaze	θ	θ'	Ordre	θ''_i	θ''_d	Eff. E //	Eff. empir. E//	Eff. H //	Eff. empir. H//
256	81,5	64,3	80,5	+ 1	71,9	71,9	0,174	0,173	0,090	0,092
304	15	85	51	- 2	70	66	0,068	0,060	0,029	0,028
744	80	30	50,2	+ 1	40	40,2	0,152	0,148	0,045	0,044
584	80	45	66,5	+ 1	55	56,5	0,213	0,209	0,05	0,048
584	15	45	16,7	- 2	30	31,7	0,145	0,140	0,075	0,072
584	20	30	- 7,5	- 3	10	12,5	0,122	0,122	0,102	0,113
584	25	25	-24,7	- 4	0	0,3	0,122	0,139	0,114	0,139
584	35	15	-52,4	- 5	-20	-17,4	0,107	0,101	0,072	0,076

Deux remarques peuvent être faites sur ce tableau.
D'abord, la formule paraît être d'autant meilleure que θ''_i est grand. Enfin, elle semble donner encore de bons résultats à 744 Å ou $\frac{\lambda_0}{d} > 0{,}25$, ce qui est très encourageant. Après délimitation du domaine de validité, cette formule devrait rendre de bons services aux opticiens de l'ultra-violet. Nous espérons pour notre part qu'elle est susceptible de prendre le relais des programmes quand $\frac{\lambda_0}{d}$ devient faible. Si tel est le cas, on peut raisonnablement entreprendre une étude systématique des réseaux échelettes recouverts d'or dans l'ultra-violet compris entre 100 Å et 1000 Å, à condition de se placer dans la configuration préconisée, seule susceptible de fournir de bonnes efficacités. Les travaux préliminaires à cette étude sont en cours.

7) INTERET DE LA DIFFRACTION CONIQUE EN ULTRA-VIOLET.

Nous avons vu au V. 3. comment la diffraction conique permet d'obtenir de bonnes efficacités sur un large domaine du visible ou de l'infrarouge. La faiblesse des efficacités dans l'ultra-violet nous a naturellement poussés à la curiosité : que devient la propriété d'invariance du I. 4. 1. dans l'ultra-violet, domaine où les réseaux n'ont notoirement plus les propriétés des réseaux parfaitement conducteurs.

On sait que, dans le proche ultra-violet, les réseaux peuvent avoir en montage de Littrow, des efficacités élevées. Que se passe-t-il si on écarte le vecteur d'onde incident du plan se section principale de telle manière que sa projection sur x oy soit fixe ? .
De manière intuitive, on peut prévoir que deux facteurs vont jouer en sens inverse. Comme la longueur d'onde diminue, le matériau s'éloigne de plus en plus du métal parfaitement conducteur et sa réflectivité en incidence normale diminue, ce qui tend à faire baisser l'efficacité.

Mais, d'autre part, l'angle ξ croit, donc aussi l'angle du vecteur d'onde incident avec le plan moyen du réseau, et ceci est bénéfique sur l'efficacité.

Pour trancher, nous avons utilisé notre programme numérique. La figure 33 porte l'efficacité théorique pour les deux polarisations fondamentales d'un réseau sinusoïdal de 3600 traits/mm recouvert d'aluminium et employé dans les conditions du théorème d'invariance à partir d'une configuration classique de Littrow pour λ_0 = 0,19 µm (θ = 20°). L'efficacité théorique reste supérieure à 0.5 jusqu'à 300 Å, malgré une absorption vers 0,15 µm. Si on se souvient de l'ordre de grandeur des efficacités obtenues en dessous de 1000 Å avec des montages classiques, on peut penser que ce résultat est susceptible de révolutionner la spectroscopie dans l'ultra-violet ! ... Il faut malheureusement faire deux réserves importantes. Tout d'abord, nous avons supposé le réseau recouvert d'aluminium. On sait que dans ce domaine, l'effet de la couche protectrice de fluorure de magnésium est catastrophique. Si on suppose que le réseau est recouvert d'or, la courbe d'efficacité obtenue dans les mêmes conditions est plus décevante mais non dépourvue d'intérêt (figure 34) : entre 1000 Å et 2000 Å, l'efficacité en lumière naturelle est de l'ordre de 0.1, en dessous de 1000Å, il y a une remontée de l'efficacité qui, à 500 Å, est de l'ordre de 0,4 (mais l'angle d'écart ξ est alors égal à 74°).

La seconde réserve concerne l'emploi d'un miroir en incidence normale. Compte tenu de la réflectivité de l'or en incidence normale à ces longueurs d'onde, il est nécessaire d'adopter un autre type de montage. Nous pensons qu'il est possible d'aplanir cette difficulté grâce à un montage du type de celui proposé sur la figure 4 de l'annexe P 7. En effet ce montage, non porté sur le brevet américain, ne comporte pas de miroir utilisé en incidence normale.

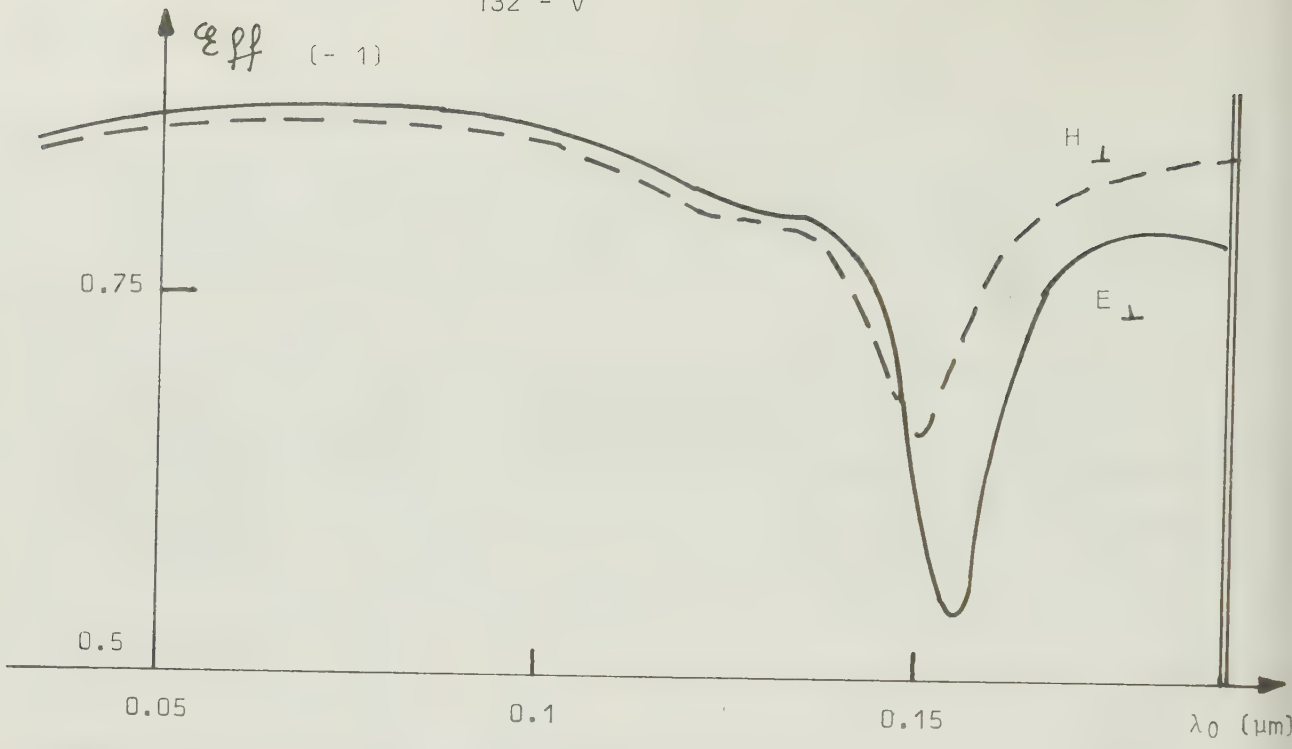


Figure 33 - *Efficacités théoriques dans un montage de diffraction conique d'un réseau sinusoïdal d'aluminium comptant 3600 traits par millimètre et de hauteur h = 0,08 µm ; θ = 20°.*

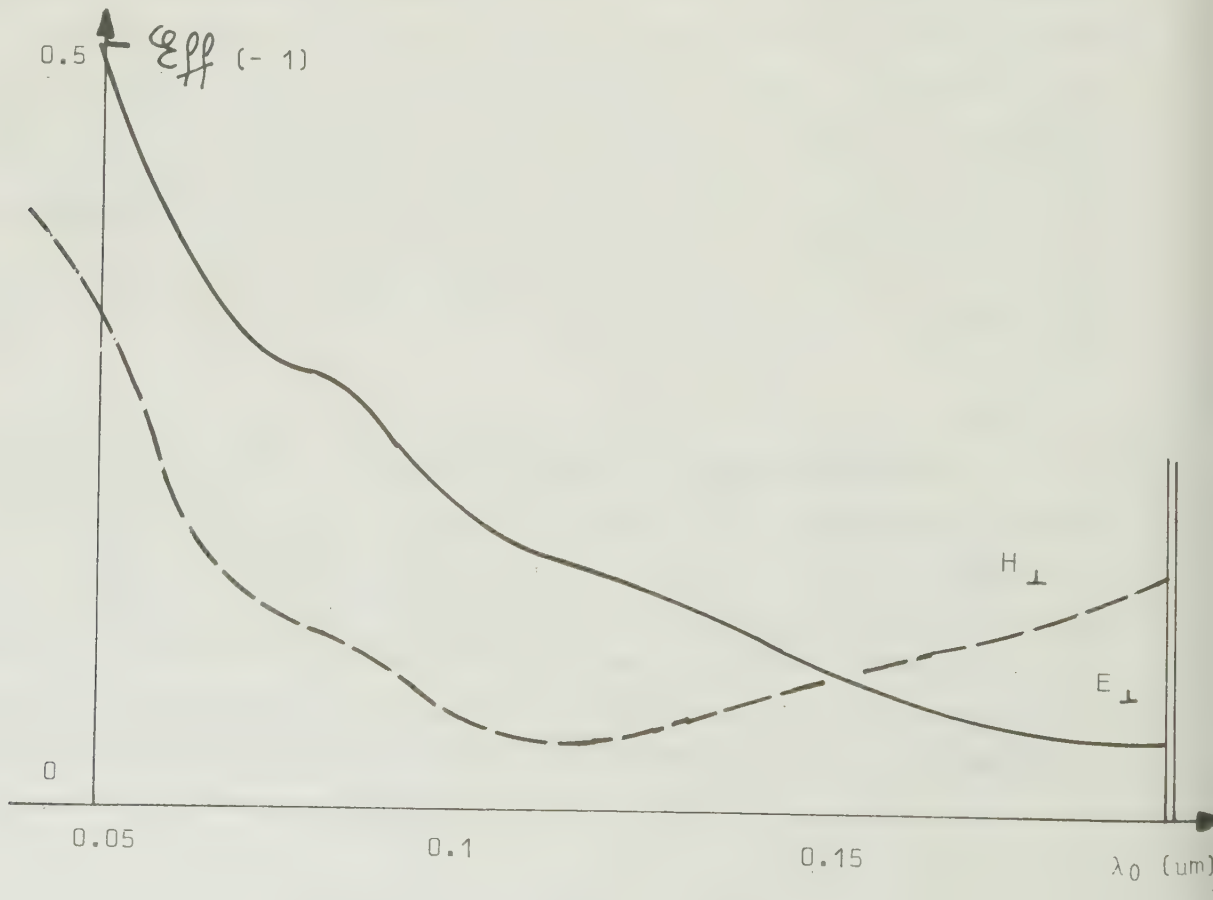


Figure 34 - *Efficacité théorique dans un montage de diffraction conique d'un réseau sinusoïdal d'or comptant 3600 traits par millimètre et de hauteur h = 0,08 µm ; θ = 20°.*

Ces résultats constituent le début d'une étude qui pourrait dans l'avenir se révéler fructueuse. Les courbes d'efficacité théoriques de la figure 34 peuvent sans doute être notablement améliorées en adoptant d'autres paramètres pour le réseau, voire un autre métal. Si cet espoir est confirmé, il est bien évident qu'une collaboration avec des expérimentateurs sera absolument nécessaire pour tirer les conclusions définitives.

Deux grandes catégories de résultats ont été exposées dans ce mémoire.

D'une part, nous avons essayé de classer et d'étendre l'ensemble des propriétés générales connues des réseaux, en particulier nous énonçons un théorème d'invariance fort utile dans l'étude de la diffraction conique. Ceci nous a permis d'envisager quelques applications pratiques des réseaux à la spectroscopie et au filtrage des longueurs d'onde. Nous serions tentés de penser que les applications pratiques des propriétés des réseaux sont encore peu explorées, leur utilisation récente en Optique intégrée (grating couplers) et les projets d'utilisation pour les absorbeurs solaires pourraient le prouver.

L'autre partie du travail concerne notre contribution au formalisme intégral de la diffraction par les réseaux et ses applications.

L'élaboration d'un outil mathématique bien adapté au problème nous a permis, après une présentation synthétique des travaux existants, de développer un formalisme intégral de la diffraction par un réseau de conductivité finie.

L'application numérique, contrôlée par des vérifications expérimentales, a nécessité de longs efforts. Nous pouvons aujourd'hui affirmer que nos programmes numériques permettent pratiquement de traiter tous les cas intéressant l'Opticien, quelle que soit la longueur d'onde et le réseau (holographique ou gravé).

L'étude numérique en cours a déjà permis de découvrir une surprenante propriété de l'aluminium dans le visible. On a par suite défini trois gammes de longueurs d'onde bien distinctes. La théorie des réseaux infiniment conducteurs ne peut être utilisée que dans la gamme supérieure, au-dessus de 4 µm.

Nous devons donc réviser nos premières conclusions sur les réseaux échelettes et holographiques employés dans le visible et le proche ultra-violet. De prochaines études à ce sujet sont à prévoir.

L'étude de l'ultra-violet lointain débute. Quelques précieuses indications sont déjà acquises. Le réseau échelette semble pour l'instant avoir les meilleures performances en efficacité, à condition de se placer dans un montage bien défini. Une formule empirique simple semble, dans ce type de configuration, pouvoir prendre le relais de nos programmes aux faibles longueurs d'onde. On peut donc espérer prochainement une étude systématique du réseau échelette.

Compte tenu de la faiblesse des efficacités dans ce domaine, les montages de diffraction conique qui dans l'infrarouge, le visible et le proche ultra-violet fournissent des efficacités surprenantes, ne semblent pas à rejeter malgré les problèmes techniques, nous espérons du moins le montrer plus clairement dans l'avenir.

Naturellement, ainsi que nous l'avons fait dans le passé, nous nous intéressons toujours au travail actuellement poursuivi par J. L. Roumiguières sur le problème des mires, en lui apportant notre aide pour la théorie et son application numérique.

ANNEXE A 1

Nous appelons distribution une fonctionnelle linéaire continue sur un espace vectoriel de fonctions. Depuis L. Schwartz [25] , on suppose généralement et implicitement que cet espace est l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables et à support borné. Les distributions définies sur $\mathcal{D}$ forment elles mêmes un espace vectoriel que l'on note $\mathcal{D}'$.

1) DEFINITION DES ESPACES $\mathcal{R}'$ ET $\mathcal{R}'^c$ DE DISTRIBUTION

Les distributions utilisées dans ce mémoire sont définies à partir d'un espace fonctionnel $\mathcal{R}$ adapté au problème du réseau éclairé sous une incidence θ ; elles forment elles mêmes un espace vectoriel nommé $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}$ est l'ensemble des fonctions $\xi(x, y)$ indéfiniment dérivables à support borné en y et telles que :

$$\xi(x + d, y) = \xi(x, y) \exp(- ik_0 d \sin\theta) \quad .$$

Toutes les propriétés des distributions de $\mathcal{R}'$ pourraient se déduire des propriétés des fonctions de $\mathcal{R}$.

Il nous semble plus simple de lier $\mathcal{R}'$ aux espaces élémentaires de distribution définis dans [25] . Pour cela, après avoir défini $\mathcal{D}'(\Gamma)$ comme l'espace des distributions sur un cercle Γ de longueur d (chapitre IV de [25])et $\mathcal{D}'_y$ comme l'espace des distributions sur les fonctions de y à supports bornés et indéfiniment dérivables, on définit l'espace $\mathcal{R}'^c$ des distributions sur le cylindre par $\mathcal{R}'^c = \mathcal{D}'(\Gamma) \otimes \mathcal{D}'_y$.
$\xi^c(x, y)$ étant une fonction de $\mathcal{R}^c$, on définit entre $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'^c$ un isomorphisme respectant l'addition et la convolution en associant $T \in \mathcal{R}'$ et $T^c \in \mathcal{R}'^c$ par :

(1) $\quad < T , \xi > = < T^c , \xi \exp(ik_0 x \sin\theta) > ,$

(1') $\quad < T^c, \xi^c > = < T , \xi^c \exp(- ik_0 x \sin\theta) > .$

On notera que, si l'incidence est nulle, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'^c$ sont confondus, par suite toutes les propriétés de $\mathcal{R}'$ se transposent à $\mathcal{R}'^c$ en remplaçant θ par 0.

2) EXEMPLES DE DISTRIBUTIONS DANS $\mathcal{R}'$

On rencontre souvent, dans l'étude des réseaux, des fonctions $u(x, y)$ localement sommables, telles que :

$$\forall y , u(x + d, y) = u(x, y) \exp(ik_0 d \sin\theta) .$$

Nous les appelons fonctions "pseudopériodiques" de période d . Une de ces fonctions définit une distribution T_u par :

$$(2) \quad < T_u , \xi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \int u(x, y)\, \xi(x, y)\, dx\, dy .$$

On vérifie que la distribution $T_u{}^c \in \mathcal{R}'^c$ associée peut alors être définie grâce à la fonction périodique $u^c(x, y) = u(x, y) \exp(- ik_0 x \sin\theta)$ par la relation :

$$(2') \quad < T_u{}^c , \xi^c > = \int_{-\infty}^{+\infty} \int u^c(x, y)\, \xi^c(x, y)\, dx\, dy .$$

ϕ étant une fonction pseudopériodique définie sur le profil $\mathcal{P}$ du réseau, on définit la distribution $\phi\delta_{\mathcal{P}}$ par l'élément de $\mathcal{R}'$ associé à l'élément $\phi \exp(- ik_0 x \sin\theta)\delta_{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{R}'^c$ tel que :

(3) $< \phi \exp(- ik_0 \times \sin\theta)\, \delta_{\mathcal{P}} , \xi^c > = \int \phi \exp(- ik_0 \times \sin\theta) \xi^c(x,y)\, ds$

s désignant l'abscisse curviligne sur une période du réseau. Enfin, dans $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'^c$, les distributions δ et δ^c sont définies par les relations habituelles :

(4) $< \delta , \xi > = \xi(0, 0)$,

(4') $< \delta^c , \xi^c > = \xi^c(0,0)$.

3) DERIVEE D'UNE DISTRIBUTION DE $\mathcal{R}'$

On pose classiquement :

(5) $< \frac{\partial T}{\partial x} , \xi > = - < T , \frac{\partial \xi}{\partial x} >$,

(6) $< \frac{\partial T}{\partial y} , \xi > = - < T, \frac{\partial \xi}{\partial y} >$.

Il faut noter que, si $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^c$ est associée à $\frac{\partial T^c}{\partial y}$, la dérivation en x pose des problèmes plus importants, en effet, d'après (1', A 1) :

$< \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^c , \xi^c > = < \frac{\partial T}{\partial x} , \xi^c \exp(- ik_0 \times \sin\theta) >$,

or, en utilisant (5, A 1) et (1, A 1), il vient :

$$< \frac{\partial T}{\partial x} \ , \quad \xi^c \exp(- ik_0 \times \sin 0)> \ = - \ < \ T, \frac{\partial}{\partial x} \left(\ \xi^c \exp(- ik_0 \times \sin 0) \right) > \ ,$$

$$= - < T, \exp(- ik_0 \times \sin 0) \frac{\partial}{\partial x} \quad \xi^c > + ik_0 \sin(\theta) < T, \xi^c \exp(- ik_0 \times \sin 0 >$$

$$= - < T^c, \frac{\partial}{\partial x} \quad \xi^c > + ik_0 \sin \theta < T^c, \xi^c > ,$$

$$= < \frac{\partial T^c}{\partial x} \ , \quad \xi^c > + ik_0 \sin \theta < T^c, \quad \xi^c > \quad ,$$

par conséquent :

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^c = \frac{\partial T^c}{\partial x} + ik_0 \ \sin(\theta) T^c \quad .$$

Ainsi donc, toute distribution est indéfiniment dérivable ; en particulier, toute fonction localement sommable et pseudopériodique en x a des dérivées premières et secondes, mais ces dérivées, qui sont des éléments de $\mathcal{R}'$, ne sont pas nécessairement des fonctions. Soit par exemple une fonction pseudopériodique $u(x, y)$ régulière dans la complémentaire de $\mathcal{P}$. Elle définit une distribution T_u et si ∇_u et $\nabla_{\frac{du}{dn}}$ désignent respectivement les sauts de la fonction et de sa dérivée normale à la traversée de $\mathcal{P}$ dans le sens de $\vec{n}$ on établit, au prix de calculs longs et fastidieux :

$$(8) \qquad \vec{\text{grad}}\ (u) = \left\{ \vec{\text{grad}}\ (u) \right\} + \vec{n} \ . \nabla_u \ \delta_{\mathcal{P}},$$

$$(9) \qquad \text{div}\ (\vec{u}) = \left\{ \text{div}\ (\vec{u}) \right\} + (\vec{n} \ . \nabla_{\vec{u}}) \ \delta_{\mathcal{P}} \ ,$$

$$(10) \qquad \vec{\text{rot}}\ (\vec{u}) = \left\{ \vec{\text{rot}}\ (\vec{u}) \right\} + (\vec{n} \wedge \nabla_{\vec{u}}) \ \delta_{\mathcal{P}} \ ,$$

$$(11) \qquad \Delta u = \text{div}(\vec{\text{grad}}\ u) = \left\{ \Delta u \right\} + \nabla_{\frac{du}{dn}} \ \delta_{\mathcal{P}} + \text{div}(\vec{n} \ . \nabla_u \ \delta_{\mathcal{P}}).$$

où les dérivations placées entre crochets $\{\ \}$ sont prises au sens usuel, sans précaution.

4) DEVELOPPEMENT SUR LA BASE DES $\exp(ik_0 \alpha_m x)$.

Toute distribution de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ peut être développée en série de Fourier (développement sur les $\exp(i\, mK\, x)$). Il en est de même pour une distribution T^c de $\mathcal{R}'^c$ et le coefficient t_m du développement est une distribution de $\mathcal{D}'_y$ donnée par :

$$(12) \quad \langle t_m, \eta(y) \rangle = \frac{1}{d} \langle T^c, \eta(y) \exp(-imK\, x) \rangle ,$$

$$= \frac{1}{d} \langle T, \eta(y) \exp(-ik_0 \alpha_m x) \rangle ,$$

avec $\eta(y) \in \mathcal{D}_y$.

On peut montrer qu'il est possible d'écrire, au sens de la convergence dans $\mathcal{R}'^c$ †:

$$T^c = \sum_m t_m \exp(im\, K\, x)$$

Développons par exemple δ^c en série de Fourier, son coefficient t_m est donné par :

$$\langle t_m , \eta(y) \rangle = \frac{1}{d} \langle \delta^c , \eta(y) \exp(-im\, K\, x) \rangle = \frac{1}{d} \eta(0) .$$

† On dit qu'une suite de distribution $T_j{}^c$ converge vers T^c quand $j \to \infty$ si $\forall\, \xi^c \in \mathcal{R}^c$, le nombre complexe $\langle T_j{}^c , \xi^c \rangle$ tend vers $\langle T^c, \xi^c \rangle$

On peut donc écrire :

$$t_m = \frac{1}{d} \delta(y) \quad .$$

Par suite :

(13) $$\delta^c = \frac{1}{d} \sum_m \delta(y) \exp(i\, m\, K\, x) \quad .$$

Grâce à l'isomorphisme, on en déduit que toute distribution $T \in \mathcal{R}'$ peut être développée en série de Fourier et comme d'après (1, A 1) la distribution de $\mathcal{R}'$ correspondant à $t_m \exp(i\, m\, k\, x)$ est $t_m \exp(ik_0\, \alpha_m\, x)$, on peut écrire :

$$T = \sum_m t_m \exp(ik_0\, \alpha_m\, x) \quad ,$$

où t_m est le coefficient de Fourier de T^c.

Par suite, dans $\mathcal{R}'$:

(14) $$\delta = \frac{1}{d} \sum_m \delta(y) \exp(ik_0\, \alpha_m\, x) \quad .$$

5) CONVOLUTION

5 - 1. DEFINITION

Si T_1 et T_2 sont des distributions de $\mathcal{R}'$, on définit, sous réserve d'existence, leur produit de convolution par :

(15) $$< T_1 * T_2 \ , \ \xi(x, y) > \ = \ < T_1 \ , \ < T_2 \ , \ \xi(x + x', y + y') >> .$$

Ceci signifie que, dans un premier temps, ξ considéré comme fonction de x' et y', délivre après application de T_2 une fonction de x et y à laquelle on fait subir l'application de T_1.

On notera que cette définition est très générale et pour définir le produit de convolution dans $\mathcal{R}'^c$, on peut remplacer dans (15, A 1) T_1 et T_2 par $T_1{}^c$ et $T_2{}^c$. On peut montrer ainsi que l'isomorphisme entre $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'^c$ respecte la convolution.

5 - 2. PROPRIETES

On établit aisément avec (15, A 1) et (12, A 1) que le p ième coefficient de Fourier de $\frac{1}{d} T_1 \times T_2$ est égal au produit de convolution dans $\mathcal{D}'_\gamma$ des p ièmes coefficients de Fourier de T_1 et T_2. On en déduit que le produit de convolution dans $\mathcal{R}'$ est commutatif, que δ en est l'unité et que pour dériver par rapport à y un produit de convolution, il suffit de dériver un seul de ses termes :

$$(16) \qquad T_1 * T_2 = T_2 * T_1$$

$$(17) \qquad T_1 * \delta = T_1$$

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial y} (T_1 * T_2) = \frac{dT_1}{dy} * T_2 = T_1 * \frac{dT_2}{dy} \quad .$$

La formule (18, A 1) peut être élargie à la dérivation en x en remarquant que $\frac{d}{dx} (\exp ik_0 \alpha_p x) = ik_0 \alpha_p \exp(ik_0 \alpha_p x)$:

$$(19) \qquad \frac{\partial}{\partial x} (T_1 * T_2) = \frac{\partial T_1}{\partial x} * T_2 = T_1 * \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad .$$

Nous allons enfin expliciter deux types de produits de convolution fréquemment rencontrés dans les problèmes de réseaux.

Calculons d'abord $G_0^c * \hat{\phi}\ \delta_{\mathcal{P}}$ où $G_0^c \in \mathcal{R}'^c$ et $\phi\ \delta_{\mathcal{P}} \in \mathcal{R}'^c$, G_0^c étant une fonction. Nous appliquons (15, A 1) :

$$< G_0^c * \hat{\phi}\ \delta_{\mathcal{P}}\ , \xi^c(X_1\ ,\ Y_1) > = < G_0^c(X_1\ ,\ Y_1)\ , < \hat{\phi}\ \delta_{\mathcal{P}}\ , \xi^c(X_1 + x'\ ,\ Y_1 + y') > > ,$$

$$= < G_0^c(X_1\ ,\ Y_1)\ ,\ \int \hat{\phi}(s')\ \xi^c(X_1 + x'\ ,\ Y_1 + y')\ ds' > ,$$

où x' et y' sont les coordonnées d'un point M' de $\mathcal{P}$ d'abscisse curviligne s'.

En appliquant (2', A 1), on trouve :

$$< G_0^c * \hat{\phi}\ \delta_{\mathcal{P}}\ , \xi^c(X_1\ ,\ Y_1) > = \int_{-\infty}^{+\infty} \int G_0^c(X_1\ ,\ Y_1) \int \hat{\phi}(s')\ \xi^c(X_1 + x',\ Y_1 + y')$$

$$\cdot\ ds'\ dX_1\ dY_1\ .$$

Après avoir fait entrer G_0^c dans l'intégrale sur le profil, on définit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} X = X_1 + x' \ , \\ Y = Y_1 + y' \ , \end{cases}$$

et on obtient :

$$< G_0^c * \hat{\phi}\ \delta_{\mathcal{P}}\ , \xi^c(X_1\ ,\ Y_1) > = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \xi^c(X,\ Y) \left[\int G_0^c(X - x',\ Y - y') \right.$$

$$\left. \hat{\phi}(s')\ ds' \right]\ dX\ dY\ ,$$

donc on en déduit d'après (2', A 1) :

$$(20) \qquad G_0^c \ast \hat{\phi}\,\delta_{\mathcal{F}} = \int G_0^c(X - x', Y - y')\,\hat{\phi}(s')\,ds' \quad .$$

Nous explicitons maintenant un autre type de produit de convolution :

$$G_0^c \ast \operatorname{div}(\vec{n}\,\hat{\psi}\,\delta_{\mathcal{F}}) = . \; G_0^c \ast \frac{\partial}{\partial x}(n_x\,\hat{\psi}\,\delta_{\mathcal{F}}) + G_0^c \ast \frac{\partial}{\partial y}(n_y\,\hat{\psi}\,\delta_{\mathcal{F}}) \quad .$$

De (18, A 1) et (19, A 1), on tire :

$$G_0^c \ast \operatorname{div}(\vec{n}\,\hat{\psi}\,\delta_{\mathcal{F}}) = \frac{\partial}{\partial x}(G_0^c) \ast n_x\,\hat{\psi}\,\delta_{\mathcal{F}} + \frac{\partial}{\partial y}(G_0^c) \ast n_y\,\hat{\psi}\,\delta_{\mathcal{F}} \quad .$$

$\frac{\partial}{\partial x} G_0^c$ et $\frac{\partial}{\partial y} G_0^c$ étant des fonctions, on est ainsi ramené à deux produits de convolution formellement semblables à celui calculé précédemment. Le développement des calculs conduit alors à :

$$(21) \qquad G_0^c \ast \operatorname{div}(\vec{n}\,\hat{\psi}\,\delta_{\mathcal{F}}) = \int \left\{ n_x \frac{\partial}{\partial x} G_0^c(X - x', Y - y') + n_y \frac{\partial}{\partial y} G_0^c (X - x', Y - y') \right\} \hat{\psi}(s')\,ds' \,,$$

n_x et n_y étant relatifs à $M'(x', y')$, la notation $\frac{\partial}{\partial x} G_0^c(X - x', Y - y')$ signifiant qu'il faut d'abord faire $\frac{\partial}{\partial x} G_0^c(x, y)$ avant de remplacer respectivement x et y par $X - x'$ et $Y - y'$.

ANNEXE A 2

Les calculs sont faits pour $G_0(X, Y)$, solution élémentaire de l'équation de Helmholtz dans le vide. Ils se généralisent immédiatement à $G_1(X, Y)$ relative au milieu $\mathcal{M}$. G_0 est définie par (6, II) :

$$G_0(X, Y) = \frac{1}{2 \text{ id } k_0} \sum_m \frac{1}{\beta_m} \exp \left(i k_0 (\beta_m |y| + \alpha_m X) \right) .$$

En définissant la fonction β par :

$$\beta(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2} \qquad \text{ou} \qquad i \sqrt{\alpha^2 - 1} ,$$

et en reprenant la notation formellement incorrecte mais très usuelle des "fonctions de Dirac", on peut alors écrire :

$$G_0(X, Y) = \frac{1}{2 \text{ id } k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \exp \left(i k_0 (\beta |y| + \alpha X) \right) \sum_m \delta(\alpha - \alpha_m) \, d\alpha ,$$

$\delta(\alpha - \alpha_m)$ désignant la "fonction de Dirac" placée en $\alpha = \alpha_m$.

D'après la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_m \delta(\alpha - \alpha_m) = \frac{d}{\lambda_0} \sum_m \exp \left(\frac{2 i \pi d m}{\lambda_0} (\alpha - \sin \theta) \right) ,$$

et il vient donc :

$$G_0(X, Y) = \frac{1}{4 i \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \exp \left(i k_0 \beta |Y| + i k_0 \alpha (X + m d) \right) \exp(- i k_0 m d \sin \theta) \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{4 i \pi} \exp(- i k_0 m d \sin \theta) \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_0 \beta} \exp \left(i k_0 \beta |Y| + i k_0 \alpha (X + m d) \right) d(k_0 \alpha) .$$

On peut reconnaître la forme intégrale de la fonction de Hankel [35] qui permet d'écrire :

$$G_0(X, Y) = \frac{1}{4\,i} \sum_m \exp(-\,i\,m\,k_0\,d\,\sin\theta)\, H_0^{+}(k_0 \,|\vec{r} + m\,d\,\vec{e}_1|) \quad ,$$

où $\vec{r}$ désigne le rayon vecteur associé au point $P(X, Y)$ de l'espace. On peut en tirer d'après (8, II) l'expression de $\mathcal{G}_0(M, M')$.

On montre par "recollement des morceaux" que dans les intégrales sur une période où figure $\mathcal{G}_0$, on peut supprimer le signe $\sum$ si on étend l'intégrale à l'infini :

$$\int \mathcal{G}_0(M, M')\, \hat{\phi}(s')\, ds' = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{+}(k_0 \,|\vec{MM'}|) \exp\left[ik_0 \sin(\theta)(x' - x)\right] \hat{\phi}(s')\, ds' \,.$$

On peut montrer de la même manière :

$$\mathcal{G}_1 \hat{\phi} = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{+}(k_1 \,|\vec{MM'}|) \exp\left[ik_0 \sin\theta(x' - x)\right] \hat{\phi}(s')\, ds' \,.$$

$$\mathcal{N}_1' \hat{\phi} = -\frac{k_1\, i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{n}(M') \cdot \vec{MM'}}{|\vec{MM'}|} H_1^{+}(k_1 \,|\vec{MM'}|) \exp\left[ik_0 \sin(\theta)(x' - x)\right] \hat{\phi}(s')\, ds' \,.$$

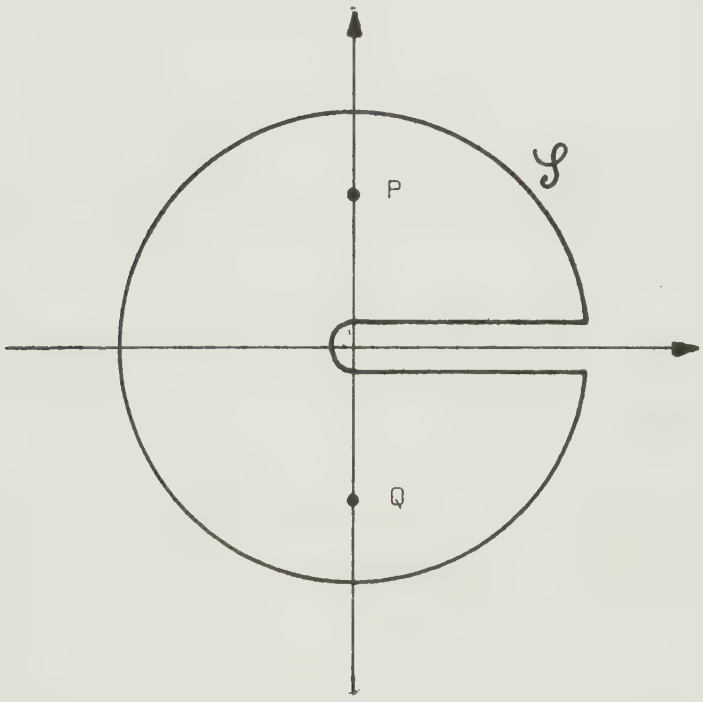
ANNEXE A 3

Calcul par la méthode des résidus de l'intégrale :

$$I(\ell) = \int_0^{\infty} \frac{u^{1-\ell}}{1 + u^2} \, du \quad ,$$

avec $0 < \ell < 1$.

Dans le plan complexe, les deux poles du dénominateur $1 + u^2$ sont situés en P et Q (voir figure).



Nous introduisons une coupure sur le demi axe des réels positifs et appliquons le théorème des résidus au parcours $\mathcal{S}$ comprenant le cercle de l'infini et deux trajets sur le demi axe des réels positifs, de part et d'autre de la coupure :

$$\int_{\mathcal{S}} f(z)\, dz = + 2\pi i \left(\mathcal{R}_{(P)} + \mathcal{R}_{(Q)} \right) \quad ,$$

avec $f(z) = \dfrac{z^{1-\ell}}{1 + z^2}$.

On trouve :

$$\mathcal{R}\ (P) = -\frac{i}{2} \exp\left(i \frac{\pi}{2} (1 - \ell)\right) ,$$

$$\mathcal{R}\ (Q) = \frac{i}{2} \exp\left(i \frac{3\pi}{2} (1 - \ell)\right) .$$

D'autre part, la contribution du cercle de l'infini est nulle, $|f(z)|$ décroissant en $|z|^{-1-\ell}$ quand $|z|$ tend vers l'infini, si bien que :

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = \int_0^{\infty} f(u)\, du + \int_{\infty}^{0} f(u \exp 2 i \pi)\, du ,$$

u désignant un nombre réel.

On en déduit finalement :

$$I(\ell) = \pi \frac{\sin\left((1 - \ell) \frac{\pi}{2}\right)}{\sin((1 - \ell)\, \pi)}$$

ANNEXE A 4

$$(1) \qquad S_1(M, M') = \sum_m \frac{1}{\beta_m} \exp\left[ik_0 \beta_m |y - y'| + i m K(x - x')\right] .$$

On pose toujours par la suite :

$$a = |y - y'| ,$$

$$b = (x - x') .$$

Etudions le comportement asymptotique de β_m quand $|m| \to \infty$.

$$\beta_m = i\sqrt{\alpha_m^2 - 1} \qquad i|\alpha_m| \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha_m^2}} = i|\alpha_m| \left(1 - \frac{1}{2\alpha_m^2} + \frac{f(\alpha_m)}{\alpha_m^4}\right) ,$$

où $f(\alpha_m)$ est une fonction continue qui tend vers une limite finie non nulle quand $|\alpha_m| \to \infty$. On peut donc écrire finalement :

$$(2) \qquad \text{si } m \to \infty , \quad \beta_m = i|\alpha_m| - \frac{i}{2|\alpha_m|} + i\frac{f(\alpha m)}{|\alpha_m|^3} .$$

a ne pouvant être négatif, S_1 converge pour $a \neq 0$, les différents termes de la série décroissant exponentiellement. Quand a devient proche de 0 , on peut prévoir une convergence de plus en plus difficile et si $a = b = 0$ (M confondu avec M'), les termes de la série décroissent seulement en $\frac{1}{m}$ donc la série diverge.

Considérons S'_1 définie par :

$$(3) \qquad S'_1(M, M') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{i\, m\lambda_0} \exp(-k_0\, \alpha_m\, a + i\, m\, K\, b)$$

$$+ \sum_{m=-1}^{-\infty} -\frac{d}{i\, m\lambda_0} \exp(+k_0\, \alpha_m\, a + i\, m\, K\, b) \quad .$$

Elle peut aussi s'écrire :

$$S'_1(M, M') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{i\, m\lambda_0} \exp(-k_0 \sin(\theta) a) \exp(-m\, K\, a + i\, m\, K\, b)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{i\, m\lambda_0} \exp(+k_0 \sin(\theta) a) \exp(-m\, K\, a - i\, m\, K\, b) \quad .$$

En posant $v = \exp(-K\, a + i\, K\, b)$ ou $v = \exp(-K\, a - i\, K\, b)$, on reconnaît des séries en $\frac{v^m}{m}$ qui se somment de manière analytique :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m}{m} = -\, \mathrm{Log}(1 - v) \quad .$$

On en tire donc :

$$(4) \qquad S'_1(M, M') = -\frac{i\, d}{\lambda_0} \exp(-k_0 \sin(\theta) a)\, \mathrm{Log}\left[1 - \exp(-K\, a + i\, K\, b)\right]$$

$$-\frac{i\, d}{\lambda_0} \exp(k_0 \sin(\theta) a)\, \mathrm{Log}\left[1 - \exp(-K\, a - i\, K\, b)\right] \quad .$$

On écrit enfin :

$$(5) \qquad S_1(M, M') = S'_1(M, M') + (S_1(M, M') - S'_1(M, M')) \quad .$$

Dans cette égalité figure le terme compact et singulier S'_1 et la série $S_1 - S'_1$ obtenue en groupant les termes de même rang. Cette série est évidemment convergente si $a \neq 0$, nous allons montrer qu'elle admet une limite si $M' \to M$, en effet :

$$(6) \quad S_1(M, M') - S'_1(M, M') = \frac{1}{\beta_0} \exp(ik_0 \beta_0 a) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta_m} \exp(ik_0 \beta_m a + i m K b) + \frac{id}{m \lambda_0} \cdot \exp(- k_0 \alpha_m a + i m K b) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta_{-m}} \exp(ik_0 \beta_{-m} a - i m K b) + \frac{id}{m \lambda_0} \exp(k_0 \alpha_{-m} a - i m K b) \right\} .$$

Le second membre de (6, A 4) comprend un terme isolé qui tend vers $\frac{1}{\beta_0}$ si $M' \to M$.

Examinons un terme q_m de la première série :

$$q_m = \frac{1}{\beta_m} \exp(ik_0 \beta_m a + i m K b) + \frac{id}{m\lambda_0} \exp(- k_0 \alpha_m a + i m K b) .$$

On peut aussi l'écrire :

$$(7) \quad q_m = \frac{1}{\beta_m} \left\{ \exp(ik_0 \beta_m a + i m K b) - \exp(- k_0 \alpha_m a + i m K b) \right\} + \left(\frac{1}{\beta_m} + \frac{id}{m \lambda_0} \right) \exp(- k_0 \alpha_m a + i m K b) .$$

En utilisant (2, A 4) et en développant en série les exponentielles après mise en facteur de $\exp(- k_0 \alpha_m a)$, on montre que le premier terme

du second membre de (7, A 4) est de la forme $\frac{C}{m^2}\,a$ quand $m \to \infty$, C étant une constante ; quand $a \to 0$, la série correspondante a donc une contribution nulle.

On peut montrer pour le dernier terme du second membre de (7) qu'on peut remplacer l'exponentielle par 1 sans changer la somme de la série.

Il reste donc finalement :

$$(8)\qquad \lim_{M' \to M} \left\{ S_1(M, M') - S'_1(M, M') \right\} = \frac{1}{\beta_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_m} + \frac{1}{\beta_{-m}} + \frac{2\,id}{m\,\lambda_0} \right) .$$

La série se trouvant au second membre est convergente, les termes étant décroissants en $\frac{1}{m^3}$.

Quand $|M\vec{M'}|$ est petit, la série $S_1 - S'_1$ converge évidemment bien plus rapidement que S_1 .

Etudions maintenant le comportement de S'_1 quand $M' \to M$.
On peut écrire :

$$(9)\qquad S'_1(M, M') = -\frac{id}{\lambda_0} \operatorname{ch}(k_0 \sin(\theta) a) \operatorname{Log} \left\{ \left(1 - \exp(-K a + i K b)\right) \cdot \left(1 - \exp(-K a - i K b)\right) \right\} + \frac{id}{\lambda_0} \operatorname{sh}(k_0 \sin(\theta) a) \cdot \operatorname{Log} \left(\frac{1 - \exp(-K a + i K b)}{1 - \exp(-K a - i K b)} \right) .$$

Si a et b tendent vers 0 , on développe en séries de Taylor les expressions figurant dans les logarithmes et on trouve :

$$S'_1(M, M') = - \frac{i\,d}{\lambda_0} \operatorname{Log} \left[K^2(a^2 + b^2) \right] + \gamma_1 (M, M') \quad ,$$

$$= - \frac{2\,id}{\lambda_0} (\operatorname{Log} K + \operatorname{Log} |s - s'|) + \gamma_1 (M, M') \quad , \tag{10}$$

avec $\gamma_1 (M, M') \to 0$ Si $M' \to M$.

(B)

$$S_2(M, M') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp \left[ik_0 \beta_m |y - y'| + i\, m K(x - x') \right] . \tag{11}$$

Cette série diverge si $M' \to M$, par suite on définit :

$$S'_2(M, M') = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(- k_0 \alpha_m a + i\, m K b) \tag{12}$$

$$+ \sum_{m=-1}^{-\infty} (\exp(k_0 \alpha_{-m} a - i\, m K b) \quad .$$

S'_2 comprend deux séries géométriques, par suite :

$$S'_2(M, M') = 1 + \exp(- k_0 \sin(\theta) a) \frac{1}{\exp(K a - i K b) - 1}$$

$$+ \exp(k_0 \sin(\theta) a) \frac{1}{\exp(K a + i K b) - 1} \quad ,$$

et après réduction au même dénominateur :

$$(13)\quad S_2'(M,M') = 1 - \mathrm{ch}(k_0 \sin(\theta)a) + \frac{\mathrm{sh}(Ka)\ \mathrm{ch}(k_0 \sin(\theta)a) - i \sin(Kb)\ \mathrm{sh}(k_0 \sin(\theta)a)}{\mathrm{ch}(Ka) - \cos(Kb)}$$

On pose :

$$(14)\quad S_2(M, M') = S'_2(M, M') + (S_2(M, M') - S'_2(M, M')\quad .$$

Le second membre de (14, A 4) comprend le terme compact S_2' et la série $S_2 - S'_2$ obtenue en groupant les termes de même rang dans S_2 et S'_2. On peut montrer que cette dernière converge bien plus vite que S_2 si $|M'\vec{M}|$ est petit et que de plus sa limite est nulle si $M' \to M$.

Etudions maintenant le comportement de S'_2 (donc de S_2) si $M' \to M$. Pour cela, on fait un développement limité du second membre de (13, A 4) :

$$S'_2(M, M') = \frac{2}{K}\ \frac{a - i\ k_0 \sin(\theta)\, ab}{a^2 + b^2} + \gamma_2'(M, M')\quad ,$$

par conséquent :

$$(15)\quad S_2(M, M') = \frac{2}{K}\ \frac{|y' - y| + i\ k_0 \sin(\theta)(x' - x)\ |y' - y|}{(s' - s)^2} + \gamma_2(M, M')\quad ,$$

avec $\gamma'_2(M, M')$ et $\gamma_2(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

$$(16)\quad S_3(M, M') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_m}{\beta_m} \exp\left\{ i\ k_0\ \beta_m\ |y - y'| + i\ m\ K(x - x') \right\}^{(C)}$$

On procède comme précédemment et par suite on définit :

$$(17)\quad S'_3(M, M') = \sum_{m=1}^{\infty} - i \exp(- k_0 \alpha_m a + i m K b)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} i \exp(k_0 \alpha_{-m} a - i m K b) \quad ,$$

$$(18)\quad = - i \operatorname{sh}(k_0 \sin(\theta) a) + \frac{\sin(Kb)\, \operatorname{ch}(k_0 \sin(\theta) a) + i \operatorname{sh}(k_0 \sin(\theta) a) \operatorname{sh}(Ka)}{\operatorname{ch}(Ka) - \cos(Kb)}$$

On pose :

$$(19)\quad S_3(M, M') = S'_3(M, M') + (S_3(M, M') - S'_3(M, M')) \quad ,$$

et on peut montrer que :

$$(20)\quad \lim_{M' \to M} (S_3(M, M') - S'_3(M, M')) = \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} \quad .$$

La série au second membre de (20, A 4) semble divergente puisque $\frac{\alpha_m}{\beta_m}$ ne tend pas vers 0 si $|m| \to \infty$. En fait, si on groupe les termes d'indice + m et - m , elle converge en $\frac{1}{m^3}$. D'autre part, si $|M \vec{M'}|$ est petit, $S_3 - S'_3$ converge bien plus vite que S_3 .

Etudions maintenant le comportement de S'_3 quand $M' \to M$. Pour cela, on fait un développement limité du second membre de (18, A 4) et il vient :

$$(21) \qquad S'_3(M, M') = \frac{2}{K} \frac{b + i\, k_0 \sin(\theta) a^2}{a^2 + b^2} + \gamma'_3(M, M') \quad ,$$

avec $\gamma'_3(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

Par conséquent :

$$(22) \qquad S_3(M, M') = \sum_m \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \frac{2}{K} \frac{(x - x') + i\, k_0 \sin(\theta)(y - y')^2}{(s - s')^2} + \gamma_3(M, M') \quad ,$$

avec $\gamma_3(M, M') \to 0$ si $M' \to M$.

REFERENCES

[1] A. Maréchal et G. W. Stroke,
C. R. Acad. Sci., 249 (1959), p. 2042.

[2] J. L. Uretsky,
Ann. Phys., 33 (1965), p. 400.

[3] R. Petit,
Thèse, NO. AO 1150 (1966).

[4] A. Wirgin,
Thèse, NO AO 1429 (1967).

[5] J. Pavageau et J. Bousquet,
Optica Acta, 17 (1970), p. 469.

[6] G. Cerutti-Maori, R. Petit et M. Cadilhac,
C. R. Acad. Sci., 268 (1969), p. 1060.

[7] A. R. Neureuther et K. Zaki,
Alta Frequenza, special issue on U. R. S. I. Symposium on electromagnetic waves (1969), p. 282.

[8] D. Maystre et R. Petit,
Optics Commun., 4, n° 1 (1971), p. 97.

[9] P. M. Van den Berg,
Thèse, Rotterdam (1971).

[10] J. C. Bolomey,
Thèse, NO AO. 5604 (1971).

[11] M. Nevière, M. Cadilhac et R. Petit,
I. E. E. E. Transactions on Antennas and Propagation, A.P. 21, 1 (1973), p. 37.

[12] J. Meixner,
Ann. Phys., 6, 2 (1949).

[13] B. A. Lippmann,
Journal Opt. Soc. Amer., 43 (1953), p. 408.

[14] R. Petit et M. Cadilhac,
C. R. Acad. Sci., 262 (1966), p. 468.

[15] A. Wirgin,
C. R. Acad. Sci., 259 (1964), p. 259,
Rev. Opt., 43 (1964), p. 449,
Rev. Opt., 44 (1965), p. 20.

[16] R. F. Millar,
Proc. Camb. Phil. Soc., 65 (1969), p. 773.

[17] R. F. Millar,
Proc. Camb. Phil. Soc., 69 (1971), p. 217.

[18] M. Nevière et M. Cadilhac,
Optics Commun., 2 (1970), p. 235.

[19] R. G. Barantsev,
Vestnik Leningradskogo Universiseta, 1 (1965), p. 66.

[20] R. Petit,
Rev. Opt., 6 (1966), p. 249.

[21] R. Petit,
Optica Acta, 14 (1967), p. 301.

[22] D. Maystre et R. Petit,
Optics Commun., 4, 1 (1972), p. 380.

[23] G. Goudet et P. Chavance,
Ondes Centimétriques, Chiron, Paris, p. 73.

[24] A. Wirgin,
Alta Frequenza, special issue on U. R. S. I. Symposium on electromagnetic waves (1969), p. 327.

[25] L. Schwartz,
Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques,
Herman, Paris (1965).

[26] J. Bass,
Cours de Mathématiques, t. III, Masson (1971).

[27] P. Poincelot,
Précis d'Electromagnétisme Théorique, Dunod, Paris (1963), p. 438.

[28] P. Filippi,
C. N. R. S. Marseille, communication personnelle.

[29] J. H. Richmond,
I. E. E. E. Transactions on antennas and propagation,
A. P. 13 (1965), p. 334.

[30] P. C. Waterman,
M. I. T. R. E. Technical report, 84 (1968).

[31] M. Nevière,
Laboratoire Optique Electromagnétique, Marseille,
Communication personnelle.

[32] P. Vincent et R. Petit,
Optics Commun., 5, 4 (1972), p. 261.

[33] A. Wirgin,
Optics Commun., 7, 1 (1973), p. 65.

[34] C. Müller,
Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves,
Springer-Verlag (1969), p. 328.

[35] P. M. Morse and H. Feshbach,
Methods of Theoretical Physics,
Mac Graw Hill Book Company (1953), p. 823.

[36] J. Meixner,
I. E. E. E. Transactions on antennas and propagation,
A. P. 20, 4 (1972), p. 442.

[37] D. Maystre et R. Petit,
Optics Commun., 5, 1 (1972), p. 90.

[38] D. Maystre et R. Petit,
C. R. Acad. Sci., 271 (1970), p. 400.

[39] D. Maystre et R. Petit,
Optics Commun., 2, 7 (1970), p. 309.

[40] D. Maystre et R. Petit,
Optics Commun., 6, 1 (1971), p. 25.

[41] D. Maystre,
Optics Commun., 6, 1 (1972), p. 50.

[42] J. Kuntzmann,
Méthodes numériques, Dunod (1959), p. 3.

[43] J. Lavoine,
Calcul Symbolique, C. N. R. S. (1953), p. 84 et 91.

[44] R. Deleuil,
Thèse NO A. O. 3601 (1969).

[45] R. Petit, D. Maystre, M. Nevière,
Practical Applications of the Electromagnetic Theory of Gratings,
9 th International Congress of Optics, Santa Monica (1972).

[46] W. R. Hunter,
U. S. Naval Research Laboratory, Washington,
Communication personnelle.

[47] P. Bousquet, L. Capella, A. Fornier et J. Gonella,
Applied Optics, 8 (1969), p. 1229.

[48] H. Volkmann,
Optik, t. 21 (1964), p. 385.

[49] M. C. Hutley,
Optica Acta, 20 (1973), p. 607.

[50] M. C. Hutley and V. M. Bird,
Optica Acta, 20 (1973), p. 771.

[51] American Institute of Physics Handbook,
Second edition, 6, p. 107.

[52] R. C. Mc Phedran and D. Maystre,
A detailed theoretical study of the anomalies of a sinusoïdal diffraction grating. à paraître dans Optica Acta.

[53] R. C. Mc Phedran et D. Maystre,
Etude théorique des anomalies de diffraction des réseaux holographiques, soumis pour publication à la Nouvelle Revue d'Optique.

[54] M. Nevière,
Laboratoire d'Optique Electromagnétique, Marseille,
Communication personnelle.

[55] Laboratoire d'Optique Electromagnétique de la Faculté des Sciences de Saint-Jérôme,
Etude théorique de l'efficacité d'un réseau métallique dans le proche ultra-violet,
soumis pour publication à la Nouvelle Revue d'Optique.

[56] A. Labeyrie et J. Flamant,
Optics Commun., 1 (1969), p. 5.

[57] G. Pieuchart et J. Flamant,

Communication personnelle.

[58] J. U. White,
Optical Apparatus employing diffraction grating,
U. S. Patent Office, NO 3 069 966 (1962).

[59] A. Wirgin,
Nouv. Rev. d'Opt. Appl., 1 (1970), p. 161.

[60] Projet de convention D. R. M. E. 73 - 837.

[61] D. Mangus, N. A. S. A.
Goddart Space Flight Center, Green Belt, Maryland (U. S. A.),
Communication personnelle.

[62] G. Sprague, D. H. Tomboulian and D. E. Bedo,
Journal of the Opt. Soc. of Amer., 45, 1 (1965), p. 756.

P1

Volume 5, number 2 OPTICS COMMUNICATIONS May 1972

DIFFRACTION PAR UN RESEAU LAMELLAIRE INFINIMENT CONDUCTEUR

D. MAYSTRE et R. PETIT

Groupe d'Optique électromagnétique, Université de Provence, Centre de St-Jérôme, 13 Marseille (13e), France

Reçu le 22 février 1972

We deal with the diffraction of a plane electromagnetic wave by lamellar and perfectly conducting gratings. A new formulation is proposed which leads to very short computation times.

Un réseau lamellaire est, à notre sens, un réseau dont le profil est décrit par l'une ou l'autre des figs. 1a et 1b. Ce genre de réseau a été très étudié par Wirgin [1, 2] sur le plan théorique et en vue des applications [3]. Le formalisme, différent de celui de Wirgin, que nous proposons dans cet article, repose sur des mathématiques élémentaires et conduit à des temps de calculs particulièrement courts. Pour simplifier, nous l'exposerons surtout sur le profil 1a, en supposant l'incidence normale et le champ électrique parallèle aux sillons. Il s'étend sans difficulté à l'incidence quelconque, à l'autre cas fondamental de polarisation, et au réseau de tiges 1b.

Soient $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ les vecteurs unitaires du trièdre de référence $Oxyz$ (fig. 1). Sous l'action de l'onde incidente $E^i = \hat{e}_z \exp(-iky)$, il s'établit un champ total $E(x,y) = \hat{e}_z E(x,y)$ que l'on se propose de déterminer. On sait que, pour $y \geqslant h$, $E(x,y)$ est donné par un développement de Rayleigh [4]:

$$E(x,y) = \exp(-iky) + \sum_n B_n \exp(inKx + i\chi_n y), \tag{1}$$

avec $\chi_n^2 = k^2 - n^2K^2$; $K = 2\pi/d$; χ_n ou χ_n/i positifs. Il se trouve que, compte tenu des particularités géométriques du profil, il est possible de trouver la forme de $E(x,y)$ pour $0 < y < h$. En effet, si $0 < y < h$, $E(x,y)$ qui s'annule pour $x = 0$ et $x = c$ peut, pour $0 < x < c$, être représenté par une série de Fourier de sinus:

$$E(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(y) \sin(n\pi x/c).$$

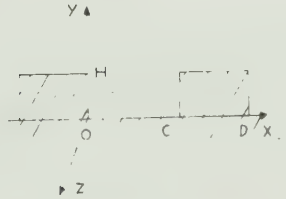


Fig. 1a. On peut considérer que le réseau est formé de lamelles à sections rectangulaires régulièrement disposées sur un plan.
OH = h, OC = c, OD = d.

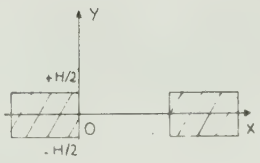


Fig. 1b.

P 1

En reportant cette série dans l'équation de Helmholz: $\Delta E + k^2 E = 0$, on montre que nécessairement:

$$E_n(y) = b_n \sin(\mu_n y) + a_n \cos(\mu_n y) ,$$

avec $\mu_n^2 = k^2 - n^2\pi^2/c^2$; μ_n ou μ_n/i positifs. La condition aux limites ($E = 0$ sur la frontière vide - métal et en particulier sur OC) impose $a_n = 0$. Puisque E est nul dans le métal, nous obtenons finalement que, si $0 \leqslant y < h$, la fonction périodique $E(x,y)$ est donnée sur l'intervalle période ($0\ d$) par:

$$E(x,y) = \sum_n b_n \sin(\mu_n y) \sin(n\pi x/c) \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant c ,$$

$$= 0 \qquad \text{si } c \leqslant x \leqslant d . \tag{2}$$

Ainsi, la détermination de E (nul pour $y < 0$) se ramène à celle de deux suites dénombrables de coefficients B_n et b_n que l'on peut espérer déterminer par un raccordement pour $y = h$. Ce raccordement peut s'effectuer en identifiant (pour $y = h$) les coefficients de Fourier de fonctions périodiques continues judicieusement choisies.

La continuité de E fournit tout d'abord, en tenant compte de (1) et (2):

$$B_n \exp(\mathrm{i}\chi_n h) + \delta_{n,0} \exp(-\mathrm{i}kh) = d^{-1} \int_0^c \left[\sum_m b_m \sin(\mu_m h) \sin(m\pi x/c) \right] \exp(-\mathrm{i}nKx)\,\mathrm{d}x = \sum_m P_{nm}\, b_m , \tag{3a}$$

c'est-à-dire sous forme matricielle:

$$\boldsymbol{B} + \mathbf{P}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{S} , \tag{3b}$$

équation dans laquelle $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des matrices colonnes inconnues (d'éléments respectifs B_n et b_n), $\boldsymbol{S}$ une matrice colonne connue [$S_n = -\delta_{n,0} \exp(-2\mathrm{i}kh)$] et $\mathbf{P}$ la matrice carrée connue dont les éléments $P_{n,m}$ ont une expression analytique simple:

$$P_{n,m} = -d^{-1} \exp(-\mathrm{i}\chi_n h) \sin(\mu_m h) \int_0^c \sin(m\pi x/c) \exp(-\mathrm{i}nKx)\,\mathrm{d}x$$

$$= -d^{-1} \exp(-\mathrm{i}\chi_n h) \sin(\mu_m h) I_{nm} ,$$

$$I_{nm} = \frac{m\pi c}{c^2 n^2 K^2 - m^2\pi^2} \left[(-1)^m \exp(-\mathrm{i}nKc) - 1\right] \qquad \text{si } 4n^2/d^2 \neq m^2/c^2 ,$$

$$= \pm c/2\mathrm{i} \qquad \text{si } 2n/d = \pm m/c .$$

On peut obtenir une deuxième équation linéaire entre $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{b}$, en traduisant la continuité pour $y = h$ de $\partial F(x,y)/\partial y$ où $F(x,y)$ est la fonction deux fois dérivable par rapport à y définie comme suit:

$$F(x,y) = E(x,y) \qquad \text{si } 0 < x < c ,$$

$$= 0 \qquad \text{si } c < x < d ,$$

et dont on désigne par $F_n(y)$ les coefficients de Fourier. Puisque cette fonction s'identifie au champ lorsque y est inférieur à h, on a alors:

$$F_n(y) = \sum_m d^{-1} \sin(\mu_n y) I_{nm}\, b_m , \qquad \partial F_n/\partial y = \sum_m d^{-1} \mu_n \cos(\mu_n y) I_{nm}\, b_m . \tag{4}$$

Il reste à trouver $F_n(y)$ lorsque $y > h$. On y parvient en introduisant la fonction périodique $C(x)$ définie sur l'intervalle période $(0d)$ par:

$C(x) = 1$ si $0 < x < c$,

$= 0$ si $c < x < d$,

et dont les coefficients de Fourier C_p sont bien connus:

$C_p = (1/2i\pi p)[1 - \exp(-ipKc)]$ si $p \neq 0$,

$= c/d$ si $p = 0$.

Puisque $F(x,y) = E(x,y)\,C(x)$:

$$F_n(y) = \sum_m C_{n-m}\, E_m(y) = \sum_m C_{n-m}\,[B_m \exp(i\chi_m y) + \delta_{m,0} \exp(-iky)] .$$

Ainsi, pour $y > h$:

$$\partial F_n/\partial y = \sum_m C_{n-m}\,[iB_m \chi_m \exp(i\chi_m y) - ik\delta_{m,0} \exp(-iky)] . \qquad (5)$$

La comparaison de (4) et (5) fournit la relation cherchée:

$$\sum_m C_{n-m}\,[iB_m \chi_m \exp(i\chi_m h) - ik\delta_{m,0} \exp(-ikh)] = \sum_m d^{-1}\mu_n I_{nm} \cos(\mu_n h) b_m , \qquad (6a)$$

soit en notation matricielle:

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{B} + \mathbf{R}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T} , \qquad (6b)$$

avec:

$$Q_{nm} = i\chi_m \exp(i\chi_m h)\, C_{n-m} , \qquad R_{nm} = -d^{-1}\mu_n \cos(\mu_n h)\, I_{nm} , \qquad T_n = ikC_n \exp(-ikh) .$$

De (3b) et (6b) on tire:

$$\boldsymbol{b} = (\mathbf{R} - \mathbf{QP})^{-1}(\boldsymbol{T} - \mathbf{QS}) , \qquad (7)$$

d'où $\boldsymbol{B}$ grâce à (3b).

En pratique, pour les besoins du calcul numérique, on est amené comme toujours à tronquer les deux développements (1) et (2) c'est-à-dire à admettre que le champ est suffisamment bien représenté par N coefficients B_n et N coefficients b_n. Tous les calculs sont alors explicites, à l'exception de l'inversion de la matrice $\mathbf{R} - \mathbf{QP}$ qui est confiée à un sous-programme bibliotèque de l'ordinateur UNIVAC 1108. Les temps de calculs sont de l'ordre du tiers de seconde pour $N = 15$. La conservation de l'énergie est assurée à mieux que 10^{-3} près, même pour des épaisseurs de lamelle h de l'ordre du pas. Cette méthode appliquée à un problème déjà traité par Wirgin a donné des résultats identiques: courbes d'efficacité superposables.

Le lecteur transposera sans peine la méthode au cas du profil 1b. Le champ E est alors donné par:

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \exp(inKx + i\chi_n y) + \exp(-iky) \qquad \text{si } y \geqslant \tfrac{1}{2}h ,$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\mu_n y) \sin(n\pi x/c) + b_n \sin(\mu_n y) \sin(n\pi x/c) , \qquad \text{si } -\tfrac{1}{2}h \leqslant y \leqslant \tfrac{1}{2}h ,$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B'_n \exp(inKx - i\chi_n y) \qquad \text{si } y \leqslant \tfrac{1}{2}h .$$

Il faut donc déterminer quatre suites de coefficients B_n, B'_n, a_n, b_n associés à quatre matrices colonnes $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}', \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Le raccordement des fonctions continues $E(x,y)$ et $C(x)\,\partial E/\partial y$ pour $y = \frac{1}{2}h$ et $y = -\frac{1}{2}h$ fournit les quatre équations matricielles nécessaires. Si après troncature les matrices colonnes inconnues sont de rang N, on peut craindre que la suite des calculs conduise à l'inversion d'une matrice carrée de rang $2N$. Il n'en est rien et un découplage inespéré permet de déterminer séparément $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ par inversion de deux matrices de rang N. Les temps de calculs sont donc au plus doublés. Les programmes déjà mis au point ont été utilisés pour déterminer le champ diffracté à une distance du réseau de l'ordre de la longueur d'onde. Il s'agissait d'une première étude sur le problème du traçage de traits fins et parallèles par contact (ou quasi contact) d'une mire métallique sur une résine photosensible. Cette étude, liée à la technologie des circuits intégrés [5], sera poursuivie en compliquant le modèle. If faut envisager la présence de dioptres plans parallèles aux lamelles. Cette éventualité semble être à la portée de la méthode proposée au prix d'une généralisation évidente. L'étude numérique est en cours.

Références

[1] A. Wirgin, Alta Frequenza, Mai (1969) 327.
[2] A. Wirgin, Thèse no. A.O. 1429 (1967).
[3] A. Wirgin et R. Deleuil, J. Opt. Soc. Am. 59 (1969) 1348.
[4] R. Petit, Rev. Opt. 6 (1966) 249.
[5] S. Middelhoek, IBM J. Res. Develop. 14 (1970) 117.

Nouv. Rev. d'Optique appliquée, 1971, **2**, n° 2, pp. 115-120

LABORATOIRE D'OPTIQUE ELECTROMAGNÉTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE
Centre de Saint-Jérôme, F 13-Marseille (13e)

ÉTUDE QUANTITATIVE DE L'EFFICACITÉ DU RÉSEAU ÉCHELETTE DANS UN MONTAGE A DÉVIATION CONSTANTE (*)

par

D. MAYSTRE et R. PETIT

INTRODUCTION

Le calcul de l'efficacité d'un réseau infiniment conducteur est un problème de physique mathématique aujourd'hui résolu : il semble que la solution de tous les problèmes pratiques rencontrés en optique puisse être fournie par l'une ou l'autre des méthodes numériques proposées au cours des cinq dernières années [1 à 8]. Ces méthodes, avec lesquelles nous sommes familiarisés, sont malheureusement assez difficiles à mettre en œuvre dans un laboratoire d'optique expérimentale. Nous avons donc pensé être utiles en publiant cette étude quantitative du réseau échelette utilisé dans l'ordre -1 et dans un montage à déviation constante.

I. — NOTATIONS UTILISÉES

Elles sont résumées sur la figure 1. Le réseau, de pas d, a une grande facette inclinée de l'angle α par rapport à son plan moyen ; il est éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ dont le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$) est repéré par l'angle d'incidence θ (θ, compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, est positif sur la figure 1). Le vecteur d'onde $\mathbf{k}_n$ associé à l'onde plane diffractée d'ordre n ($|\mathbf{k}_n| = k$) est repéré par l'angle θ_n (θ_n, compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, est positif sur la Fig. 1). Par convention, la déviation D, angle des axes de la lunette collimatrice et de la lunette d'observation, est positive si $\mathbf{k}_n$ se trouve à droite d'un observateur se déplaçant dans le sens de $\mathbf{k}$ (D est donc négative sur la Fig. 1).

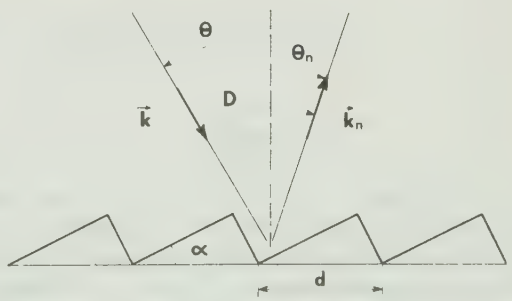


FIG. 1. — *Notations utilisées.*

(*) Ce travail a pu être réalisé grâce à l'aide de la D. R. M. E. et du C. N. R. S.

Nous écrivons la formule des réseaux sous la forme :

$$\sin \theta_n = \sin \theta + n \frac{\lambda}{d},$$

soit, pour l'ordre -1,

$$\sin \theta_{-1} = \sin \theta - \frac{\lambda}{d},$$

ou, en faisant intervenir la déviation,

$$\sin \theta + \sin (\theta + D) = \frac{\lambda}{d};$$

dans le cas particulier du montage de Littrow ($D = 0$), cette formule devient :

$$2 \sin \theta = \frac{\lambda}{d}.$$

Nous nous plaçons en régime permanent sinusoïdal dans l'un ou l'autre des deux cas de polarisation, notés $E\,/\!/$ ou $H\,/\!/$ suivant que le champ électrique ou magnétique est parallèle aux sillons. Le champ diffracté peut donc être représenté par le scalaire $u(x, y)$ amplitude complexe de la composante de **E** ou **H** sur un axe parallèle aux sillons. A une onde incidente $u_i(x, y) = e^{ik(x \sin \theta - y \cos \theta)}$, on peut, à condition de se placer suffisamment loin du réseau, associer un champ diffracté décrit par un développement de Rayleigh [2] :

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n e^{ik(x \sin \theta_n + y \cos \theta_n)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n u_n(x, y).$$

Les seules fonctions $B_n u_n(x, y)$ représentant des ondes planes non évanescentes sont celles pour lesquelles $|\sin \theta_n|$ est inférieur à l'unité ; l'efficacité e_n dans l'ordre n est alors la quantité $B_n B_n^*$ cos θ_n/cos θ qui représente la fraction du flux incident diffractée dans cet ordre.

II. — RAPPELS THÉORIQUES

Pour prévoir qualitativement l'allure des courbes données ci-après pour un réseau échelette à facettes perpendiculaires, il est bon d'avoir à l'esprit deux résultats théoriques établis dans des publications citées en référence.

Théorème 1 [9]

Dans le cas H//, lorsqu'un tel réseau (Fig. 2) est éclairé perpendiculairement à sa grande facette et si la distance d sin α de deux grandes facettes consécutives est égale à un nombre entier n de demi-longueur d'onde, toute la lumière diffractée se trouve dans l'ordre $-n$. L'efficacité e_{-n} est égale à 1, toutes les autres efficacités sont nulles.

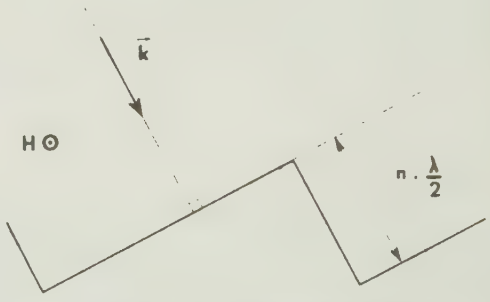


FIG. 2. — *Conditions d'application du théorème* 1.

Théorème 2 [10]

Quelle que soit la polarisation ($E\,/\!/$ ou $H\,/\!/$) l'efficacité e_0 dans l'ordre 0 (pouvoir réflecteur) est inchangée quand, à incidence constante, on fait subir au réseau une rotation de 180° autour d'un axe perpendiculaire à son plan moyen (Fig. 3).

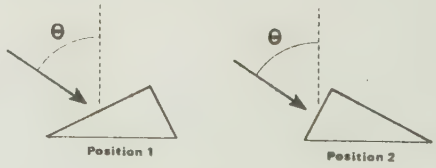


FIG. 3. — *Conditions d'application du théorème* 2.

III. — LE MONTAGE DE LITTROW DANS L'ORDRE — 1 ($D = 0$)

Généralités

En se reportant à [10] on voit que si λ/d est supérieur à 2/3 les seules ondes non évanescentes sont celles d'ordre 0 et -1. Dans ces conditions, l'application du théorème 2 et de la loi de conservation de l'énergie ($e_{-1} + e_0 = 1$) montre que l'efficacité e_{-1} est la même pour les positions I et II de la figure 3 pourvu que θ soit supérieur à $\theta_L = \arcsin(1/3) \simeq 19{,}5°$. Nous nous limitons donc, sans beaucoup restreindre la généralité de l'étude, à des angles α inférieurs à $\pi/4$ et nous représentons les variations de e_{-1} en fonction de θ ou de λ/d (la table de la figure 4 permet une conversion rapide).

θ degrés	$\frac{\lambda}{d}$ (Littrow)	$\frac{\lambda}{d}$ ($D = 15°$)	$\frac{\lambda}{d}$ ($D = -15°$)
0	0.000	0.259	
5	0.174	0.429	
10	0.348	0.597	0.187
15	0.518	0.759	0.259
20	0.684	0.916	0.429
25	0.846	1.066	0.597
30	1.000	1.207	0.759
35	1.148	1.340	0.916
40	1.286	1.462	1.066
45	1.414	1.573	1.207
50	1.532	1.672	1.340
55	1.638	1.759	1.462
60	1.730	1.832	1.573
65	1.812	1.891	1.672
70	1.880	1.936	1.759
75	1.932	1.966	1.832
80	1.970		1.891
85	1.992		1.936
90	2.000		1.966

FIG. 4. — *Table donnant λ/d en fonction de θ.*

H est parallèle aux sillons.

— Si $\theta = \alpha$, $d \sin \alpha = d \sin \theta = \lambda/2$ et, d'après le théorème 1, $e_{-1} = 1$.

— Si $\theta = (\pi/2) - \alpha$ (Fig. 5*a*), θ est supérieur à $\pi/4$ donc à θ_L ; nous savons donc que e_{-1} a même valeur que si le réseau est attaqué sur la petite facette (Fig. 5*b*) ;

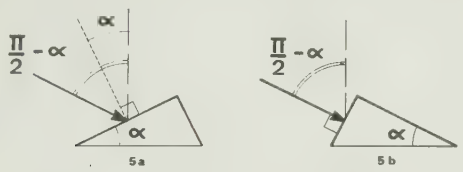


FIG. 5.

Application du théorème 2 au cas de H// avec $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

e_{-1} est donc égal à l'unité d'après le théorème 1. Ainsi, la fonction $e_{-1}(\theta)$ possède deux maximums égaux à l'unité ; l'un, obtenu pour $\theta = \alpha$, est prévu par la théorie scalaire classique, l'autre correspond à $\theta = (\pi/2) - \alpha$. Ces deux maximums sont d'autant plus éloignés que α est faible, ils sont confondus pour $\alpha = \pi/4$. Le calcul numérique permet de préciser la forme des courbes d'efficacité, si l'angle d'incidence θ est exprimé en degrés (Fig. 6*a* à 6*h*).

E est parallèle aux sillons. A notre connaissance, aucun théorème ne peut nous permettre de faire des prévisions précises ; les figures 6*a* à 6*h* résument les calculs numériques.

Commentaires

En règle générale, le calcul numérique est d'autant plus précis que λ/d est grand et α petit : d'après nos estimations, la précision est de l'ordre de 10^{-2}, donc meilleure que celle des mesures photométriques.

On note que pour des valeurs de α supérieures à 30°, il est possible, dans le cas *H//*, d'obtenir une efficacité supérieure à 0,95 dans un intervalle de longueur d'onde dont la largeur atteint le pas pour α voisin de 30°. Cette remarque, déjà signalée pour les

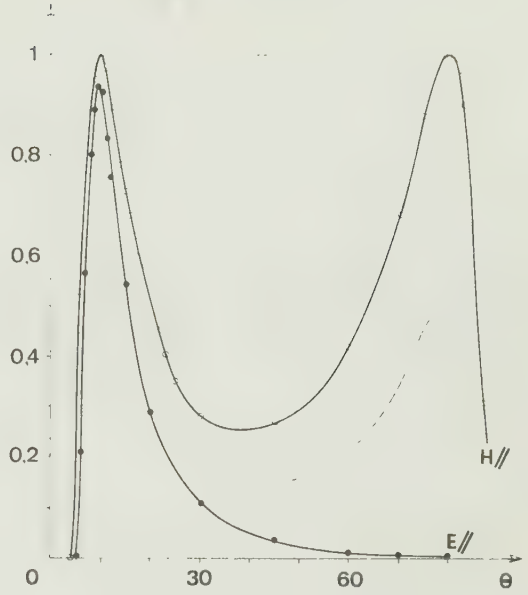


FIG. 6*a*. — $D = 0$, $\alpha = 10°$.

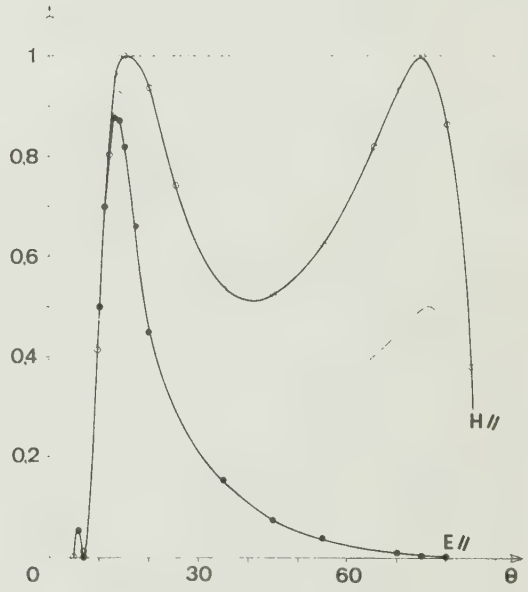


FIG. 6*b*. — $D = 0$, $\alpha = 15°$.

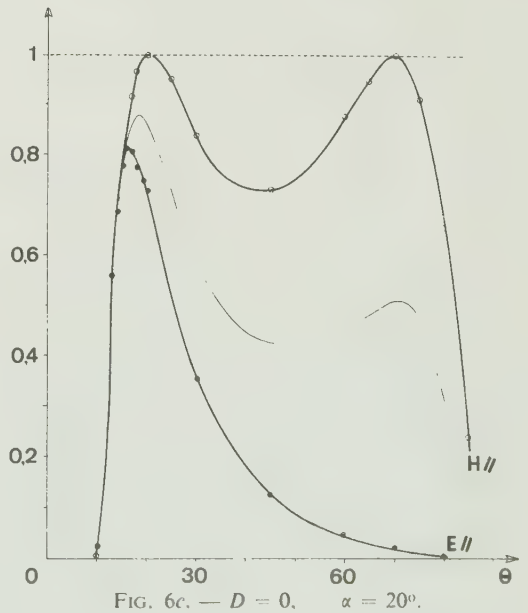


FIG. 6*c*. — $D = 0$, $\alpha = 20°$.

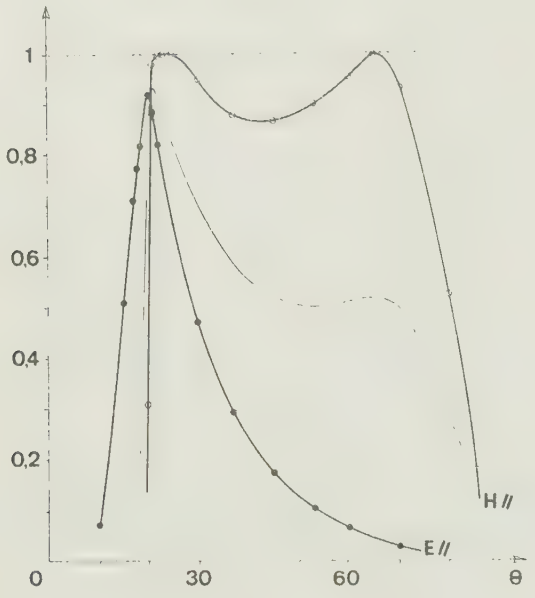


FIG. 6d. — $D = 0$, $\alpha = 25°$.

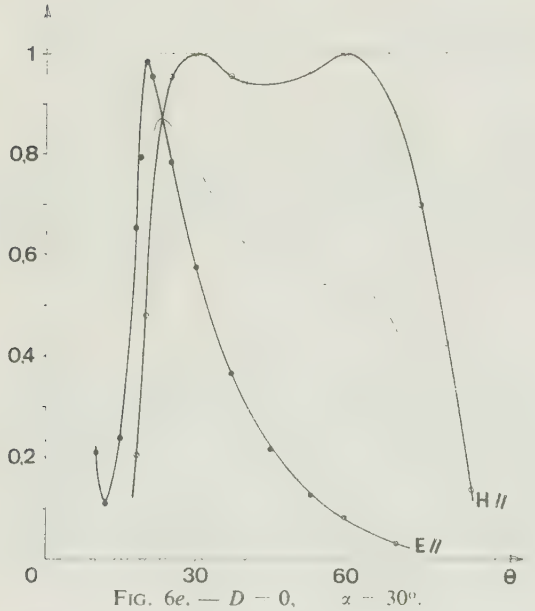


FIG. 6e. — $D = 0$, $\alpha = 30°$.

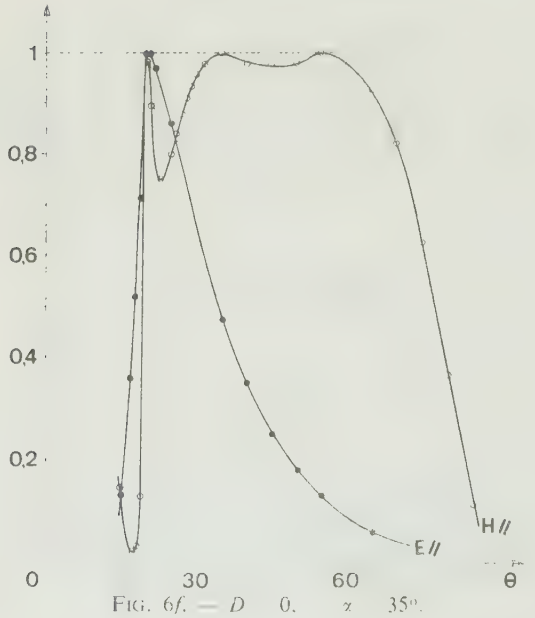


FIG. 6f. — $D = 0$, $\alpha = 35°$.

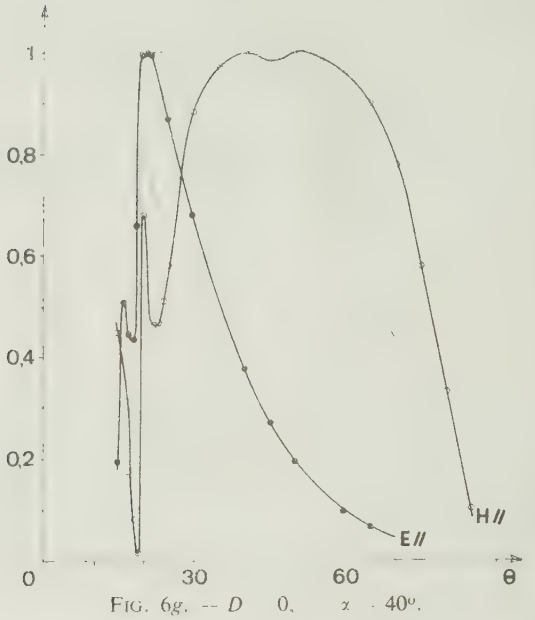


FIG. 6g. — $D = 0$, $\alpha = 40°$.

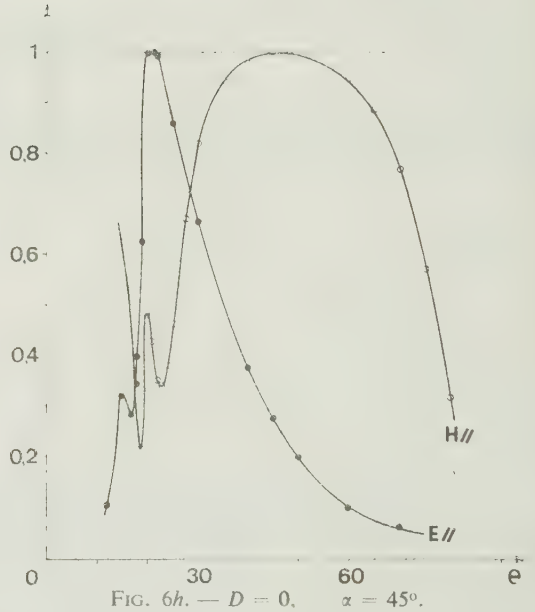


FIG. 6h. — $D = 0$, $\alpha = 45°$.

réseaux lamellaires [11] semble intéressante pour la réalisation de monochromateurs ou de spectromètres en lumière polarisée ; la forte valeur de l'efficacité explique l'emploi du réseau comme miroir de cavité laser et la « largeur de blaze » permet d'envisager le monochromateur laser [12].

On peut chiffrer l'importance des effets de polarisation en évaluant la différence entre la longueur d'onde λ_M donnant effectivement l'efficacité maximale en $E//$ et celle λ_B prévue par la théorie scalaire ($\lambda_B = 2\,d \sin\alpha$ correspond effectivement à un maximum d'efficacité en $H//$). On constate que pour $\alpha = 45°$,

$$\lambda_M \simeq \frac{\lambda_B}{2} !$$

On peut prévoir l'efficacité en « lumière naturelle » en faisant la moyenne des efficacités obtenues en $E//$ et $H//$; la courbe correspondante figure en trait fin sur les graphiques.

IV. — LES MONTAGES A DÉVIATION CONSTANTE

Ce sont les plus utilisés, mais comme, en général, la déviation est faible, on leur attribue le plus souvent les propriétés du montage de Littrow. Les figures 7*a* à 7*d* et 8*a* à 8*d*, reproduisent les résultats de nos calculs respectivement pour une déviation de + 15° ou − 15°. La valeur des maximums reste voisine de l'unité ; l'allure des courbes est conservée et on ne commettrait pas de grossière erreur en les déduisant de celles obtenues en Littrow par une translation d'amplitude voisine de − $D/2$.

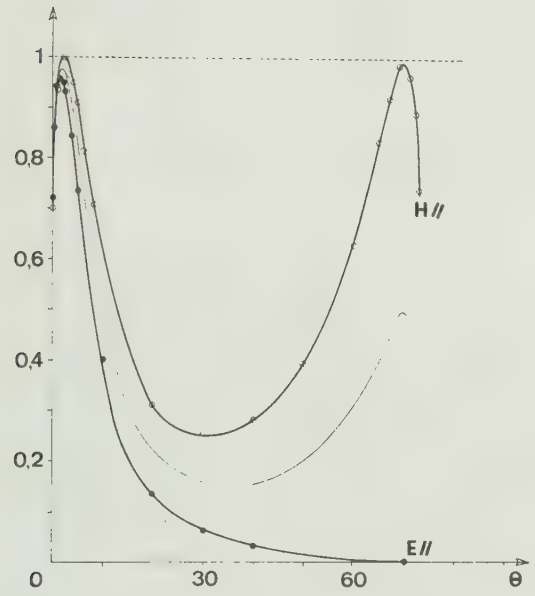


FIG. 7*a*. — $D = + 15°$, $\alpha = 10°$.

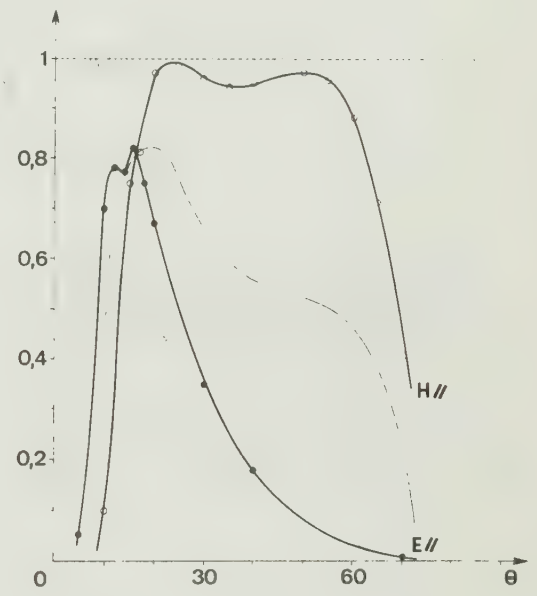


FIG. 7*c*. — $D = - 15°$, $\alpha = 30°$.

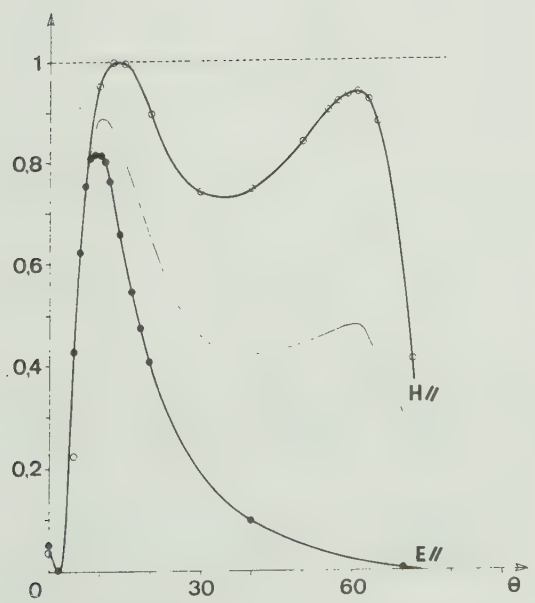


FIG. 7*b*. — $D = + 15°$, $\alpha = 20°$.

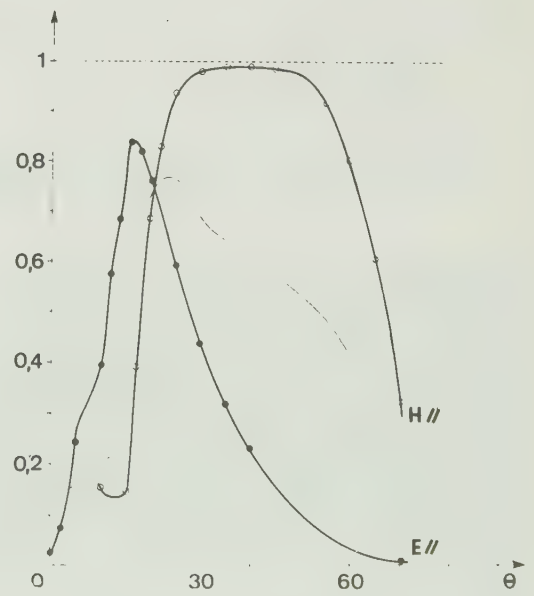


FIG. 7*d*. — $D = - 15°$, $\alpha = 40°$.

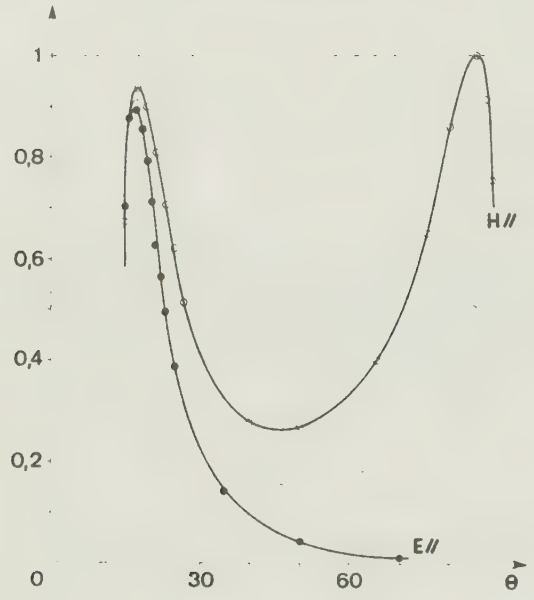


FIG. 8*a*. — D — 15°, α 10°.

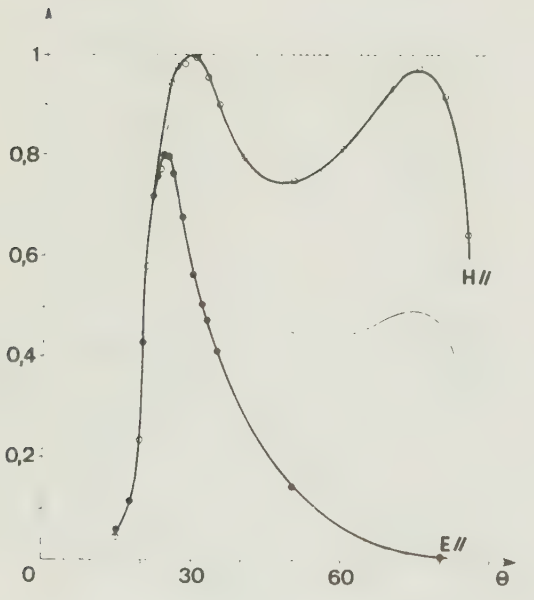


FIG. 8*b*. — D — 15°, α 20°.

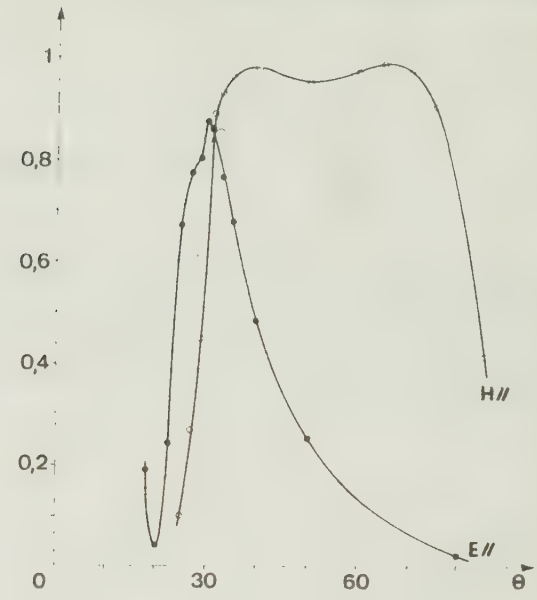


FIG. 8*c*. — D — 15°, α 30°.

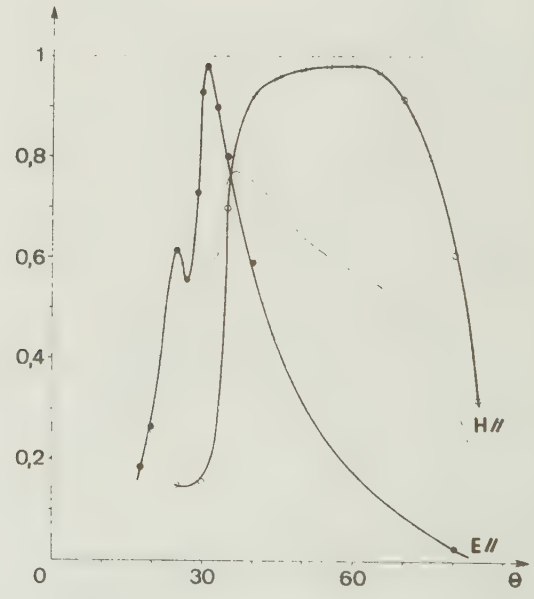


FIG. 8*d*. — D — 15°, α 40°.

RÉFÉRENCES

[1] URETSKY (J. L.). — *Annals of Physics*, Vol. **33**, N° 3, p. 400 à 427, 1965.

[2] PETIT (R.). — *Rev. Optique*, **45**, p. 249 à 276 et 353 à 370, 1966.

[3] WIRGIN (A.). — Thèse, N° *C. N. R. S.*, A. O. 1429.

[4] PETIT (R.) et CADILHAC (M.). — *C. R. Ac. Sc.*, t. **262**, série B, p. 468 à 472, 1966.

[5] MCCLELLAN (R. P.) and STROKE (G. W.). — *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. **45**, n° 4, december 1966, p. 383-390.

[6] PAVAGEAU (J.). — *Optica Acta*, Vol. **17**, N° 6, p. 469 à 478, 1970.

[7] DUMERY (G.) et FILIPPI (P.). — *C. R. Ac. Sc.*, t. **270**, série B, p. 137 à 139, 1970.

[8] MAYSTRE (D.) et PETIT (R.). — *C. R. Ac. Sc.*, t. **271**, série B, p. 400 à 403, 1970.

[9] MARÉCHAL (A.) et STROKE (G. W.). — *C. R. Ac. Sc.*, t. **249**, p. 2042 à 2044, 1959.

[10] PETIT (R.). — *Optica Acta*, Vol. **14**, N° 3, p. 301 à 310, 1967.

[11] WIRGIN (A.). — *Nouv. Rev. d'Optique appl.*, **1**, N° 3, p. 161 à 163, 1970.

[12] HARD (T. M.). — *Applied Optics*, Vol. **9**, N° 8, p. 1825 à 1830, 1970.

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1971.)

Imprimé en France. — Editions MASSON et Cie

Volume 2, number 7 OPTICS COMMUNICATIONS December 1970

SUR LA DETERMINATION DU CHAMP DIFFRACTE PAR UN RESEAU HOLOGRAPHIQUE

D. MAYSTRE et R. PETIT
Laboratoire d'Optique Electromagnétique, Faculté des Sciences de Marseille, Centre de Saint-Jérôme, France

Reçu le 2 juillet 1970

We deal with the theoretical determination of light efficiencies for "holographic gratings". Some numerical results are given to emphasize the influence of grating shape constants.

1. INTRODUCTION

On sait [1] que Jobin-Yvon fabrique des réseaux holographiques: un support plan est enduit d'une résine photopolymérisable qui enregistre le phénomène d'interférences produit par deux sources cohérentes ponctuelles; après révélation, rinçage, séchage et métallisation, on obtient un réseau de diffraction dont le profil est mal connu. Cet article contient les premiers résultats d'une étude numérique de ce genre de réseaux supposés infiniment conducteurs.

2. LE PROFIL DES RESEAUX HOLOGRAPHIQUES

Plusieurs réseaux Jobin-Yvon ont été examinés au Laboratoire de Physique Cristalline de la Faculté des Sciences de Marseille et la fig. 1 reproduit un des nombreux clichés déjà obtenus par microscopie électronique [2]. C'est à partir de telles photographies que nous avons fait les déterminations de profils nécessaires aux calculs d'efficacités*: ceux dont nous allons rendre compte ont été effectués en assimilant la génératrice du réseau à une courbe déduite d'une "cycloïde raccourcie" par affinité orthogonale d'axe Ox; ses équations paramétriques sont:

$$x = u - A \sin Ku \ ,$$

$$y = B\,(1 + \cos Ku) \ ,$$

u est le paramètre, B et A sont deux constantes fixant respectivement la profondeur H des sillons ($H = 2B$) et leur largeur à mi-profondeur, (fig. 2),

* L'efficacité dans un ordre donné est le quotient du flux diffracté dans cet ordre par le flux incident.

Fig. 1. Observation au microscope électronique du profil d'un réseau holographique. (Laboratoire de Physique Cristalline de la Faculté des Sciences de Marseille.)

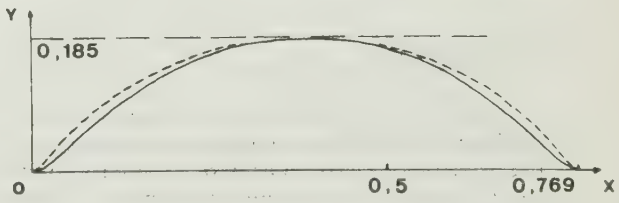


Fig. 2. Profils possibles de deux réseaux holographiques de même hauteur $H = 0{,}24\,d$. —— $A = 0{,}09\,d$, ---- $A = 0{,}12\,d$. L'unité de longueur est le μm.

K est la pulsation spatiale du réseau ($K = 2\pi/d$) et pour tous les calculs exposés le pas d est égal à 1/1300 mm.

3. LES METHODES DE CALCUL EMPLOYEES

Nous avons utilisé le formalisme récemment décrit par Pavageau [3]. Les deux équations intégrales relatives aux deux cas fondamentaux de polarisation, notés respectivement $E//$ ou $H//$ suivant que le champ électrique E ou le champ magnétique H est parallèle aux sillons, sont très voisines. Ce sont des équations de Fredholm de deuxième espèce, de la forme:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int_0^d N(x,x')\,\phi(x')\,dx' ,$$

où $\phi_0(x)$ est une fonction périodique connue, $N(x,x')$ est un noyau borné donné par une série, continu, périodique en x et x', $\phi(x)$ est la fonction périodique inconnue, liée à la densité superficielle de courant, et à partir de laquelle on peut obtenir le champ diffracté dans tout l'espace.

Pour nos premiers calculs, nous avons appliqué la méthode itérative préconisée par Pavageau [3]. Lorsqu'elle s'est révélée inefficace elle a été remplacée par la méthode plus simple déjà employée avec succès par Bolomey pour des objets diffractants de dimensions finies [4]. On divise l'intervalle (O,d) en P intervalles C_j $(j = 1,\ldots,P)$ sur chacun desquels on suppose que les fonctions $\phi(x)$ et $\phi_0(x)$ gardent une valeur constante ϕ_j et ϕ_{0j}. L'équation de Fredholm conduit alors au système linéaire:

$$\phi_i = \phi_{0i} + \sum_{j=1}^{P} \phi_j \int_{C_j} N(x_i,x')dx' ,$$

qui permet de déterminer les ϕ_j dès que l'on a calculé les intégrales qui figurent dans ses coefficients. Ce calcul d'intégrales simples ne pose pas de problèmes et se ramène à celui de la tabulation du noyau.

4. RESULTATS

Pour essayer d'analyser l'influence de la profondeur H et de la largeur à mi-profondeur nous avons suivi l'évolution d'une courbe d'efficacité lorsque ces paramètres varient. Il s'agit de la courbe donnant, dans l'ordre - 1, et pour une déviation constante de 13 degrés, l'efficacité en fonction de l'angle d'incidence θ.

4.1. *Influence de* $\rho = H/d$

Les figs. 3 et 4 donnent, pour une largeur à mi-profondeur fixée, $(A = 0{,}09d)$ les courbes d'efficacité correspondant à 4 valeurs différentes de ρ.

La méthode itérative a pu être utilisée pour les trois plus faibles valeurs de ρ à condition de ne pas trop s'approcher des valeurs de θ donnant lieu à une anomalie de Wood; la conservation de l'énergie a toujours alors été vérifiée à mieux que 5% prés. Pour $\rho = 0{,}3$ en raison d'une trop fréquente absence de convergence du processus itératif nous avons préféré utiliser systématiquement la méthode de discrétisation: des valeurs de P de l'ordre de 50 à 70 ont toujours permis de vérifier la conservation de l'énergie à mieux que 2% près dans le cas $E//$, mais nous avons du parfois nous contenter de 6% dans le cas $H//$.

a) Cas $E//$ (fig. 3).

On remarque en premier lieu la régularité des courbes et la présence d'un "effet de blaze"* assez peu intuitif pour ce type de profil. Les valeurs de l'efficacité maximale et de l'"angle de blaze"** augmentent avec ρ: si $\rho = 0{,}3$ le maximum atteint une valeur proche de 0,7 pour $\theta = 10{,}5$ degrés (ce qui correspond à une longueur d'onde voisine de 0,45 μm).

b) Cas $H//$ (fig. 4).

* On dit qu'il y a "effet de blaze" dans un ordre donné quand l'énergie diffractée se retrouve presque entièrement dans cet ordre.

** On appelle "angle de blaze" l'angle d'incidence correspondant à l'effet de blaze maximal.

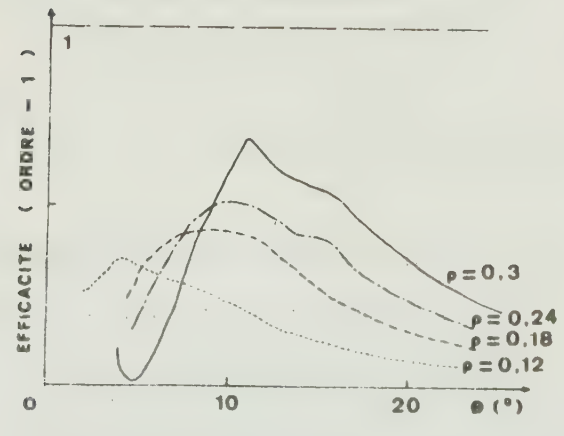


Fig. 3. Cas $E//$, influence de ρ sur une courbe d'efficacité.

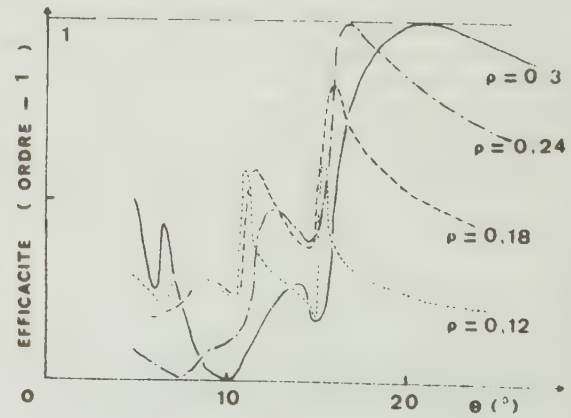


Fig. 4. Cas $H//$; influence de ρ sur une courbe d'efficacité.

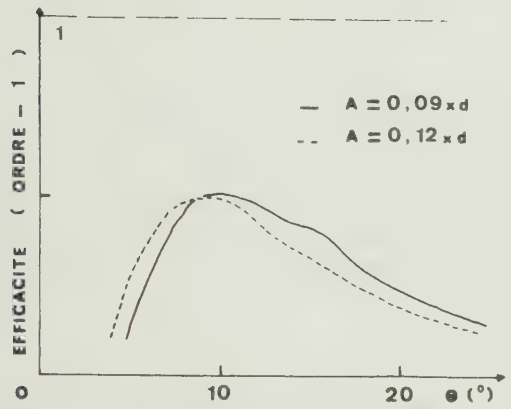


Fig. 5. Cas $E//$; influence de la largeur a mi-profondeur sur une courbe d'efficacité.

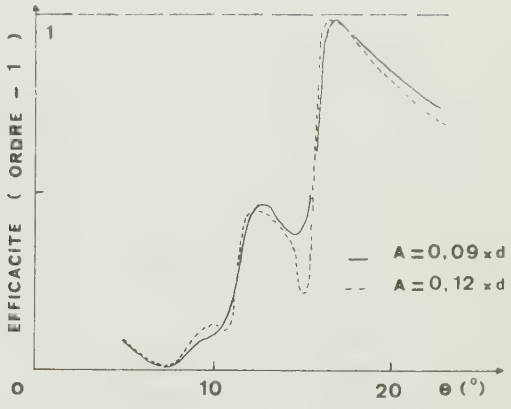


Fig. 6. Cas $H//$; influence de la largeur à mi-profondeur sur une courbe d'efficacité.

Les courbes sont beaucoup moins régulières; on y distingue deux parties: - la partie de gauche, correspondant à des angles d'incidence inférieurs à 15 degrés environ, est très irrégulière; la présence de "trous" liés à la proximité d'anomalies de Wood peut se révèler gênante dans certaines utilisations pratiques des réseaux.

- La partie de droite, beaucoup plus régulière, met en évidence un "effet de blaze" très prononcé: l'efficacité maximale est pratiquement égale à 1 pour les deux plus grandes valeurs de ρ.

L' "angle de blaze" et la largeur du pic croissent avec ρ. Pour ρ égal à 0,3, on observe un maximum voisin de 1 pour un angle d'incidence égal à 21 degrés (ce qui correspond à une longueur d'onde voisine de 0,7 μm).

L'augmentation de ρ semble donc être favorable: d'une part, l'effet de blaze croît, d'autre part, les "trous" s'éloignent de l'angle de blaze.

4.2. *Influence de la largeur à mi-hauteur*

Sur la fig. 2, on compare le profil représenté en trait plein d'un réseau étudié dans le paragraphe précédent ($\rho = 0{,}24$, $A = 0{,}09d$), à celui d'un reseau de même hauteur mais de largeur à mi-profondeur différente ($A = 0{,}12d$) représenté en pointillé. Les figs. 5 et 6, relatives aux deux cas de polarisation, montrent clairement que la largeur à mi-profondeur est ici un paramètre sans grande influence sur la courbe d'efficacité.

Nous avons retrouvé dans cette étude théorique et numérique les propriétés des réseaux holographiques signalées par les expérimentateurs de Jobin-Yvon:

- existence d'un "effet de blaze" aussi important que pour les réseaux échelettes.
- irrégularité des courbes d'efficacité au voisinage des anomalies de Wood.

La confrontation quantitative, pour un réseau donné, de nos résultats avec les résultats expérimentaux n'a cependant pas encore été faite car les méthodes de microscopie électronique jusqu'ici employées ne nous donnent pas le profil du réseau avec la précision nécessaire. Des études sont en cours pour y remédier.

REFERENCES

[1] A. Labeyrie et J. Flamand, Opt. Commun. 1 (1969) 5.
[2] P. Bousquet, L. Capella, A. Fornier et J. Gonella, Appl. Opt. 8 (1969) 1229.
[3] J. Pavageau et J. Bousquet, Opt. Acta 17 (1970) 469.
[4] J. Ch. Bolomey, Thèse, Orsay (1967).

P4

Volume 4, number 1 OPTICS COMMUNICATIONS September 1971

ESSAI DE DETERMINATION THEORIQUE DU PROFIL OPTIMAL D'UN RESEAU HOLOGRAPHIQUE

D. MAYSTRE et R. PETIT
Laboratoire d'Optique Electromagnétique, Université de Provence, Centre de St. Jérôme 13, Marseille 13e, France

Reçu le 5 juillet 1971

Our aim is to determine the grating shape constants theoretically in order to get an efficiency similar to the one which is obtained with an echelette grating.

1. INTRODUCTION

Nous avons déjà montré dans un précédent article [1] que l'on peut prévoir théoriquement l'existence de fortes efficacités pour les réseaux holographiques dont les propriétés de blaze ont été mises en évidence expérimentalement au cours des dernières années. Nous nous proposons de rechercher numériquement les valeurs optimales de certains paramètres dont l'intervalle de variation a été dicté par l'état actuel des techniques de fabrication†.

2. MODELE MATHEMATIQUE ADOPTE POUR DECRIRE LE PROFIL

Le cliché de microscopie électronique déjà publié dans cette revue [1] est en accord avec les prévisions des ingénieurs Jobin et Yvon notamment en ce qui concerne la planéité du fond des sillons qui s'interprèterait compte tenu des courbes de réponse de la résine employée. Pour représenter le profil suggéré par ce cliché reproduit fig. 1, nous avons essayé trois solutions:

(a) suite de segments de droite (fig. 1a),

(b) courbe utilisée dans notre premier article (fig. 1b),

(c) arcs de cercle et segments de droite (fig. 1c).

Pour le montage de Littrow, dans l'ordre -1, le calcul numérique montre que l'efficacité n'est pas très sensible à la courbe adoptée pour représenter le profil d'un sillon (figs. 2 et 3). Après discussion avec les ingénieurs du Département Réseaux de Jobin et Yvon, nous avons donc adopté le modèle " segments de droite"

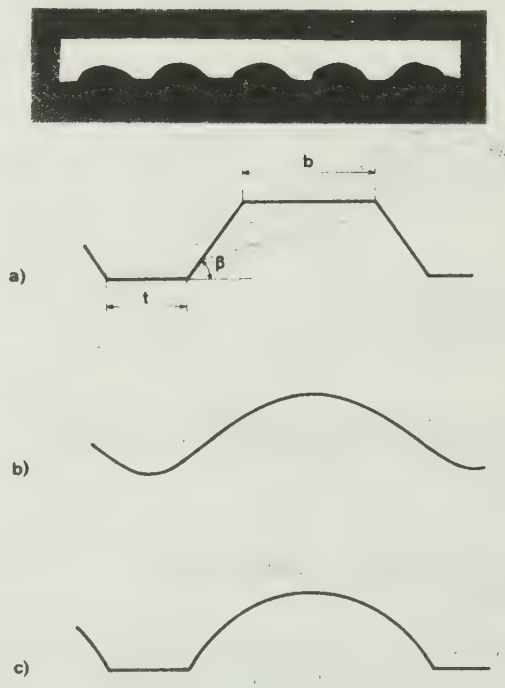


Fig. 1. Modèles mathématiques adoptés pour représenter le profil d'un réseau holographique.

de la fig. 1a, modèle très souple pour lequel nous pouvons de plus employer la méthode que nous avons préconisée [2].

† Cette étude a été faite en collaboration avec la firme Jobin et Yvon qui fabrique des réseaux holographiques.

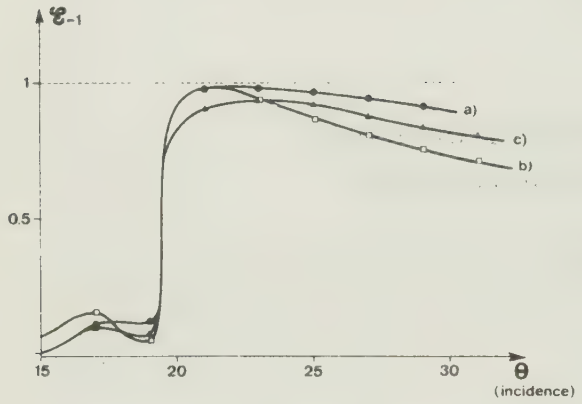


Fig. 2. Comparaison des courbes d'efficacité obtenues pour un montage de Littrow dans le cas de polarisation $H\,/\!/$.

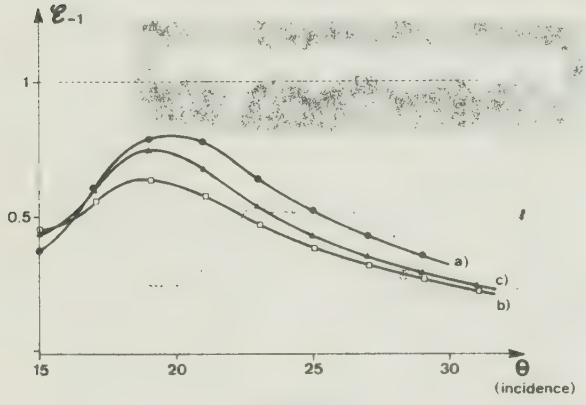


Fig. 3. Comparaison des courbes d'efficacité obtenues pour un montage de Littrow dans le cas de polarisation $E\,/\!/$.

3. RESULTATS POUR LE MONTAGE DE LITTROW

Pour toutes les courbes des figs. 4 et 5, la profondeur des sillons est égale au cinquième du pas. Cette valeur a été choisie compte tenu de calculs déjà publiés [1] et de mesures effectuées par microscopie électronique sur des réseaux standards.

3.1. *Influence de la pente des versants des sillons*

Pour une largeur du fond des sillons égale à la moitié du pas, les figs. 4 montrent que $\mathrm{tg}\,\beta$ n'est pas un paramètre important.

3.2. *Influence de la largeur du fond des sillons*

Pour tracer les graphiques 5, on a pris $\mathrm{tg}\,\beta = 2$.

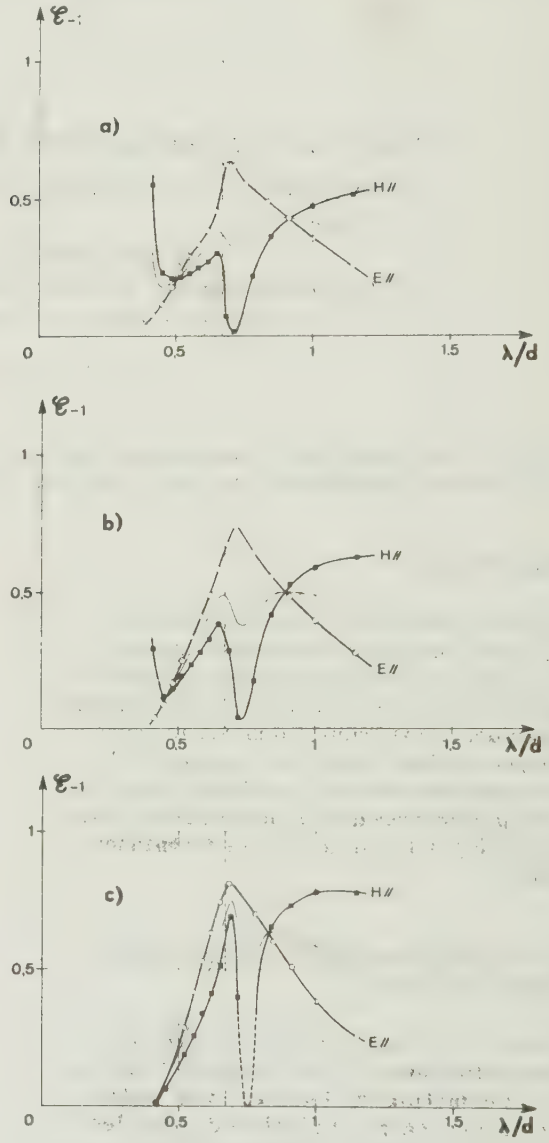


Fig. 4. Influence de la pente des versants des sillons pour $t = \frac{1}{2}d$: (a) $\mathrm{tg}\,\beta = 1$; $\mathrm{tg}\,\beta = 1{,}33$; (c) $\mathrm{tg}\,\beta = 4$.

On voit que, comme nous l'avons déjà signalé [1], il est possible d'obtenir avec les réseaux holographiques des efficacités du même ordre qu'avec les réseaux échelettes [3]. Bien entendu, nous sommes en mesure de donner pour ces réseaux holographiques un réseau de courbes aussi complet que celui qui a été publié pour les échelettes. On notera, sur les figs. 5, l'extrême sensibilité du réseau holographique à "l'anomalie de Wood": en $H\,/\!/$, une importante chute d'efficacité se manifeste au voisinage de $\lambda/d = 0{,}67$, valeur souvent voisine de celle qui correspond au maxi-

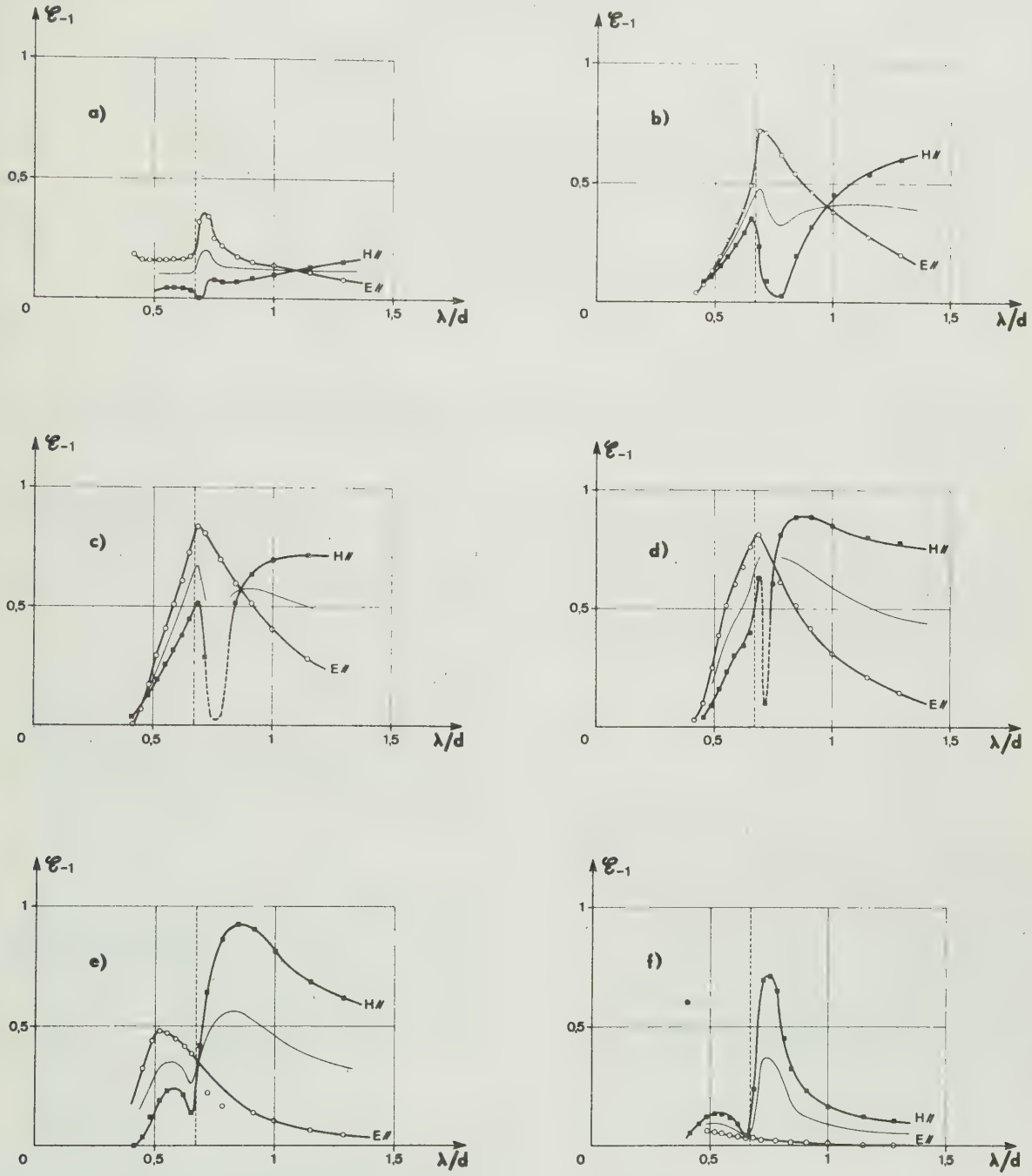


Fig. 5. Influence de la largeur du fond des sillons pour $\mathrm{tg}\,\beta = 2$; (a) $t = 0{,}8\,d$; (b) $t = 0{,}6\,d$; (c) $t = 0{,}5\,d$; (d) $t = b = 0{,}4\,d$; (e) $t = 0{,}2\,d$; (f) $t = 0$.

un champ égal au champ diffracté pour $y > f(x)$:

$$E^{d}(P) = \int_{\text{période}} G_0(P,M')\,\phi(M')\,ds' .$$

La fonction de Green $G_0(P,M')$ qui apparait sous le signe somme est égale à $G_0(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM'})$ où $G_0(\overrightarrow{OP})$ vérifie:

– une condition de "pseudo périodicité":

$$G_0(\overrightarrow{OP}+d\hat{e}_x) = G_0(\overrightarrow{OP})\exp[ik_0 d\sin\theta] ,$$

– l'équation de Helmholtz avec un "peigne de Dirac" comme second membre:

$$\Delta G_0(\overrightarrow{OP}) + k_0^2 G_0(\overrightarrow{OP})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nd)\,\delta(y)\exp[ink_0 d\sin\theta] , \qquad (1)$$

– une condition d'onde sortante.

On définit de la même manière $G(P,M')$ et $G(\overrightarrow{OP})$ pour le milieu conducteur en remplaçant k_0 par k dans le premier membre de l'équation de Helmholtz.

D'après [3], ϕ est solution de l'équation intégrale:

$$\phi_0(M) = \int_{\text{période}} \rho(M,M')\,\phi(M')\,ds' ,$$

avec:

$$\phi_0(M) = E^{i}(M) + 2\int_{\text{période}} \left[G(M,M')\frac{dE^{i}(M')}{dn} - \frac{dG(M,M')}{dn_{M'}}E^{i}(M')\right] ds' ,$$

$$\rho(M,M') = -G(M,M') - G_0(M,M') + 2\int_{\text{période}} \left[\frac{dG(M,M'')}{dn_{M''}}G_0(M'',M') - G(M,M'')\frac{dG_0(M'',M')}{dn_{M''}}\right] ds'' ,$$

le symbôle de dérivée normale d/dn_M signifiant que la dérivation est faite par rapport à M.

C'est une équation intégrale singulière de Fredholm de première espèce.

3. Application au cas d'un métal conducteur

3.1. *Expression des fonctions de Green*

En désignant par x et y les coordonnées de P, on trouve [4]:

$$G_0(\overrightarrow{OP}) = (1/2id)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1/\chi_n)\exp[i\chi_n|y| + i\alpha_n x] , \qquad (2)$$

avec

$$\alpha_n = nK + k_0\sin\theta \quad \text{et} \quad \chi_n^2 = k_0^2 - \alpha_n^2 , \qquad (3)$$

χ_n ou χ_n/i positifs. On pourrait prendre pour $G(\overrightarrow{OP})$ l'expression déduite de (2) en remplaçant les χ_n par des χ_n' obtenus par substitution de k_0 par k dans la deuxième équation de (3), mais ceci conduit à une série très lentement convergente. On peut la transformer en série rapidement convergente en remarquant que:

$$G(\overrightarrow{OP}) = (1/2id)\int_{-\infty}^{+\infty} (1/\chi')\exp[i\chi'|y| + i\alpha x] \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha-\alpha_n)\,d\alpha , \qquad (4)$$

avec $(\chi')^2 = k^2 - \alpha^2$. Alors, par utilisation successive de la formule sommatoire de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha-\alpha_n) = (1/K)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[ind(\alpha-k_0\sin\theta)] ,$$

et de la forme intégrale de la fonction de Hankel d'ordre 0:

$$H_0^{+}(k|\overrightarrow{OP}|) = J_0(k|\overrightarrow{OP}|) + iN_0(k|\overrightarrow{OP}|)$$

$$= (1/\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} (1/\chi')\exp[i\chi'|y| + i\alpha x]\,d\alpha ,$$

on obtient finalement:

$$G(\overrightarrow{OP}) = -\tfrac{1}{4}i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{+}(k|\overrightarrow{OP}-nd\hat{e}_x|)\exp[+ink_0 d\sin\theta] .$$

Ce résultat aurait pu être retrouvé plus rapidement en tenant compte de la linéarité de l'opérateur $\Delta + k^2$ du

premier membre de (1); on sait en effet que:

$$(\Delta+k^2)\,H_0^+(k|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-nd\hat{e}_x|) = 4\mathrm{i}\delta(x-nd)\,\delta(y)\,.$$

On notera enfin que, compte tenu de la pseudo périodicité de ϕ:

$$\int_{\text{période}} G(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\phi(\mathrm{M}')\,\mathrm{d}s' = -\tfrac{1}{4}\mathrm{i}\int_C H_0^+(k|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}|)\,\phi(\mathrm{M}')\,\mathrm{d}s'.$$

Dans le second membre de cette identité se trouve une seule fonction de Hankel, mais l'intégration se fait sur toute la directrice.

3.2. *Equation intégrale*

Le lecteur pourra vérifier qu'en posant:

$$\psi(x) = \phi(\mathrm{M})\exp[-\mathrm{i}k_0 x\sin\theta]\{1+[f'(x)]^2\}^{1/2}\,,$$

en prenant pour l'onde incidente une amplitude unité et après simplification, l'équation intégrale s'écrit:

$$\begin{aligned} u(x) &+ \int_{-\infty}^{+\infty} N(x,x')\,v(x')\,\mathrm{d}x' - \int_{-\infty}^{+\infty} N'(x,x')\,u(x')\,\mathrm{d}x' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} N(x,x')\,\psi(x')\,\mathrm{d}x' - \int_0^d N_0(x,x')\,\psi(x')\,\mathrm{d}x' \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} N'(x,x'')\int_0^d N_0(x'',x')\,\psi(x')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x'' \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} N(x,x'')\int_0^d N_0'(x'',x')\,\psi(x')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

avec:

$$u(x) = \exp[-\mathrm{i}\chi_0 f(x)]\,,$$

$$v(x) = 2\mathrm{i}[\alpha_0 f'(x) + \chi_0]\exp[-\mathrm{i}\chi_0 f(x)]\,,$$

$$N(x,x') = \tfrac{1}{4}\mathrm{i}H_0^+(k|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}|)\exp[\mathrm{i}k_0\sin\theta(x'-x)]\,,$$

$$N'(x,x') = \tfrac{1}{2}k\mathrm{i}\{[f(x')-f(x)+(x-x')f'(x')]/|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}|\}$$
$$\times H_1^+(k|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}|)\exp[\mathrm{i}k_0\sin\theta(x'-x'')]\,,$$

$$N_0(x,x') = (1/2\mathrm{i}d)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1/\chi_n)$$
$$\times\exp[\mathrm{i}\chi_n|f(x)-f(x')| + \mathrm{i}nK(x-x')]\,,$$

$$N_0'(x,x') = (1/d)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\mathrm{sgn}\{f(x)-f(x')\}-(\alpha_n/\chi_n)f'(x)]$$
$$\times\exp[\mathrm{i}\chi_n|f(x)-f(x')| + \mathrm{i}nK(x-x')]\,.$$

Après résolution, l'amplitude de l'onde plane diffractée dans le vide et dans l'ordre n est donnée par:

$$B_n = (1/2\mathrm{i}d\chi_n)\int_0^d \exp[-\mathrm{i}\chi_n f(x) - \mathrm{i}nKx]\,\psi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour résoudre l'éq. (5), nous utilisons une méthode de discrétisation en déterminant les valeurs ψ_i de la fonction $\psi(x)$ en Q points x_i de l'intervalle $[0,d]$.

3.3. *Calcul numérique des intégrales portant sur une période*

On peut montrer que $N_0'(x,x')$ est partout borné [5], on trouve:

$$\lim_{x'\to x} N_0'(x,x') = -\frac{1}{2\pi}\frac{f''(x)}{1+[f'(x)]^2} - (\mathrm{i}/\pi)\,k_0\sin\theta f'(x)$$
$$-[f'(x)/d]\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n/\chi_n\,.$$

Le calcul de $N_0'(x,x')$ pour $x'\neq x$ exige par contre la sommation d'une série dont on peut accélérer la convergence [6]. Numériquement, nous aurons à intégrer sur un intervalle fini une fonction partout bornée, ce qui ne pose pas de problèmes.

Le calcul des intégrales où figure $N_0(x,x')$ est plus délicat, cette dernière fonction présentant une singularité logarithmique pour $x = x'$, on se ramène au cas précédent en posant:

$$\int_0^d N_0(x,x')\,\xi(x')\,\mathrm{d}x' = \qquad (6)$$
$$\int_0^d [N_0(x,x')\xi(x') - N_s(x,x')\xi(x)]\,\mathrm{d}x' + \xi(x)\int_0^d N_s(x,x')\,\mathrm{d}x'\,,$$

avec

$$N_s(x,x') = (1/2\pi)[\log|x'-x| + \log(d-|x'-x|)]\,,$$

en effet, la dernière intégrale de (6) est égale à $(\mathrm{d}/\pi)(\log d - 1)$ et dans celle qui la précède, la quantité

sous le signe somme est partout bornée:

$$\lim_{x' \to x} [N_0(x,x') - N_s(x,x')]$$

$$= (1/\pi)(\tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \tfrac{1}{4}\log\{1 + [f'(x)]^2\} - \log d)$$

$$+ (1/2id\chi_0) + \sum_{n \neq 0} (1/\chi_n + 1/|n|K) .$$

Pour $x \neq x'$, one peut également accélérer la convergence de la série en remarquant que pour $|n|$ grand:

$$(1/2id\chi_n) \exp [i\chi_n a + inKb]$$

$$\approx -(1/2d|n|K) \exp [-|\alpha_n| a + inKb] .$$

3.4. *Calcul numérique des intégrales sur un support non borné*

La fig. 2 représente la variation d'une fonction proportionnelle à $H_0^+(kx)$ avec $k = 6ik_0$, valeur très voisine de cell donnée par [7] pour l'aluminium à $\lambda = 0{,}546\ \mu$. On peut remarquer que cette fonction est quasiment égale à zéro si $x > 0{,}1\lambda$, or, sous les signes somme, elle est multipliée par des fonctions telles que $\psi(x)$ ou $\exp [ik_0 x \sin\theta]$ qui varient peu dans un intervalle égal à $\lambda/10$. Ceci nous amène à penser que, dans l'intervalle où $N(x,x')$ prend une valeur notable, les fonctions par lesquelles il est multiplié sont très bien représentées par un développement de Taylor tronqué. Quelques calculs élémentaires confirment ces prévisions intuitives; ansi, si on calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^+(k|x|) \cos(k_0 x) \mathrm{d}x ,$$

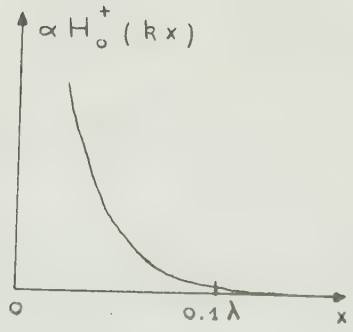


Fig. 2. Variation de $H_0^+(kx)$ en fonction de x, pour $k = 6ik_0$.

on s'aperçoit que l'erreur commise en remplaçant $\cos(k_0 x)$ par 1, premier terme de son développement de Taylor, est seulement de l'ordre du centième. Si on se contente de garder le premier terme du développement, on obtiendra par exemple:

$$\int_{\infty}^{+\infty} N(x,x')\, \psi(x') \mathrm{d}x'$$

$$= \tfrac{1}{4} \mathrm{i} \int_{\infty}^{+\infty} H_0^+(k\{1 + [f'(x)]^2\}^{1/2} |x' - x|)\, \psi(x) \mathrm{d}x' ,$$

soit, tous calculs faits:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(x,x')\, \psi(x') \mathrm{d}x'$$

$$= (\mathrm{i}/2k)\{1 + [f'(x)]^2\}^{-1/2} \int_{\Delta} H_0^+(z) \mathrm{d}z ,$$

cette dernière intégration se faisant dans le plan complexe sur la demi-droite Δ issue de l'origine et contenant le point représentatif du nombre k.

Le développement des calculs montre que l'approximation supérieure permettrait d'ajouter au terme en $1/k$ explicité plus haut un terme en $1/k^3$ et plus généralement, on peut montrer que, par ce procédé, on obtient un développement des intégrales en puissances impaires de $1/k$. Or le module de ce nombre est d'autant plus petit que la conductivité est plus grande, la convergence du développement est donc plus rapide; en particulier pour l'aluminium dans l'infrarouge ou dans la région visible du spectre, on peut, pour avoir une précision de l'ordre du centième, se contenter de garder le premier terme, ce qui rend les calculs très simples. On peut constater par ailleurs qu'en posant $\sigma = \infty$, donc $1/k = 0$, l'éq. (5) devient celle du métal infiniment conducteur [4]. Le calcul des approximations successives nécessite la connaissance du résultat d'intégrales du type $\int_{\Delta} H_0^+(z) z^{2m} \mathrm{d}z$, elles se font analytiquement en développant en puissances croissantes de p l'égalité suivante:

$$\int_0^{\infty} H_0^+(x) \exp [-px] \mathrm{d}x$$

$$= (1+p^2)^{-1/2} [1 - (2\mathrm{i}/\pi) \arg\{\mathrm{sh}(p)\}] .$$

Les mêmes remarques peuvent être appliquées à la fonction $N'(x,x')$.

4. Résultats numériques

L'application des remarques précédentes permet, à partir de l'éq. (5) d'aboutir à une équation matricielle d'ordre Q qu'on peut résoudre par la méthode du pivot maximum par exemple.

Sur la fig. 3 est représentée l'efficacité E_{-1} dans la gamme du visible et en Littrow, d'un réseau sinusoïdal dont le rapport hauteur sur pas est égal à 0,4, la courbe supérieure a été obtenue en supposant le réseau infiniment conducteur, l'autre en lui donnant les caractéristiques électriques de l'aluminium évaporé [7]. L'affaiblissement de l'efficacité est particulièrement notable pour la "longueur d'onde de blaze" égale à 0,75 μ: elle passe de 1 à 0,85. Il est curieux de remarquer que l'efficacité diminue beaucoup moins pour les faibles longueurs d'onde, bien que la conductivité y soit plus faible. Ces calculs ont été faits en plaçant approximativement six points par longueur d'onde; naturellement, il a été vérifié que les résultats ne varient pas en augmentant Q. Le temps de calcul est inférieur à 5 sec sur un ordinateur Univac 1108 il serait beaucoup plus faible pour le cas du réseau infiniment conducteur, qui a ainsi bénéficié indirectement de l'amélioration de nos techniques numériques de sommation de séries et d'intégration.

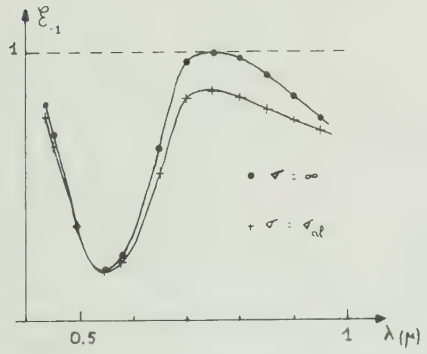


Fig. 3. Efficacité d'un réseau sinusoïdal en Littrow dans l'ordre −1 avec une conductivité infinie ou égale à la conductivité σ_{al} de l'aluminium.

5. Conclusion

Le formalisme mathématique et le traitement numérique que nous avons décrits permettent de calculer l'efficacité des réseaux métalliques de conductivité finie. Les calculs sont d'autant plus simples que la conductivité est grande et nous pouvons d'ores et déjà les faire dans le visible pour des réseaux du type holographique. Nous espérons que les approximations d'ordre supérieur nous permettront de connaître les efficacités des réseaux utilisés dans l'ultra violet, région spectrale où l'aluminium ne peut plus être considéré comme infiniment conducteur.

Remerciement

Nous remercions Monsieur le Professeur R. Petit qui est à l'origine de ce travail et l'a suivi pas à pas. Nous remercions également Monsieur le Professeur M. Cadilhac pour ses précieux conseils mathématiques.

Références

[1] G. Cerutti-Maori, R. Petit et M. Cadilhac, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 268B (1969) 1060.
[2] A.R. Neureuther et K. Zaki, Alta Frequenza 38 (1969) 282.
[3] D. Maystre et P. Vincent, Opt. Commun. 5 (1972) 327.
[4] R. Petit, Rev. d'Opt. 6 (1966) 249, 353.
[5] J. Pavageau, Opt. Acta 17 (1970) 469.
[6] P.M. van der Berg, Appl. Sci. Res. 24 (1971) 261.
[7] American Institute of Physics Handbook, second Ed. 6–107.

P6

Volume 8, number 3 OPTICS COMMUNICATIONS July 1973

SUR LA DIFFRACTION D'UNE ONDE PLANE ELECTROMAGNETIQUE PAR UN RESEAU METALLIQUE

D. MAYSTRE

Université de Provence, Centre de St-Jérôme, Laboratoire d'Optique Electromagnétique, 13397 Marseille Cédex 4, France

Reçu le 25 avril 1973

This paper deals with the diffraction of a plane electromagnetic wave by metallic gratings. Some calculations have already been achieved on an UNIVAC 1110 computer in both ultraviolet and visible regions.

1. Introduction

Nous avons donné récemment les premiers résultats d'une étude électromagnétique de la diffraction par des réseaux de conductivité finie [1, 2]. Sous réserve que la longueur d'onde incidente soit de l'ordre de grandeur du pas et que le vecteur d'onde incident soit orthogonal aux sillons, nous sommes aujourd'hui en mesure de connaître théoriquement le champ diffracté par un réseau de forme donnée éclairé par une onde plane monochromatique de polarisation, longueur d'onde et incidence quelconques, moyennant la connaissance des constantes électromagnétiques caractérisant le métal (ou diélectrique) recouvrant ou constituant le réseau. Ceci a nécessité une généralisation de nos programmes numériques au cas des réseaux présentant des arêtes, tels que les réseaux échelettes, ou dont le profil n'est pas représentable par le graphe d'une fonction $y = f(x)$, comme c'est le cas pour un réseau lamellaire. Cette généralisation a été acquise, entre autres, au prix d'une étude minutieuse et très délicate du comportement du noyau de l'équation intégrale utilisée [1] au voisinage des pointes, où l'on sait que certaines grandeurs physiques peuvent avoir un comportement singulier.

Nous connaissons aujourd'hui la valeur de l'indice de l'aluminium à partir d'une longueur d'onde égale à 190 Å [3] et ceci nous a permis d'entreprendre, avec l'aide du CNES, une exploitation intensive de nos programmes numériques dans la zone de l'ultraviolet où la conductivité de l'aluminium ne peut certainement plus être considérée comme infinie. Bien que quelques calculs aient déjà été faits dans cette zone, nous nous sommes jusqu'ici plus spécialement intéressés à l'efficacité des réseaux d'aluminium dans le visible où le métal est considéré généralement comme infiniment conducteur.

2. Efficacité des réseaux métalliques dans l'ultraviolet

Sur le tabl. 1 sont portés les résultats de deux calculs pris permi ceux effectués à la demande du CNES et de Jobin–Yvon pour déterminer les performances théoriques de deux réseaux échelettes de 3600 traits/mm destinés à être embarqués sur satellite. Ces réseaux en or devant être utilisés dans des conditions expérimentales bien définies (fig. 1), l'incidence θ, la longueur d'onde λ, le pas et l'ordre de diffraction p nous étaient imposés. Les "angles de blaze" α avaient

Tableau 1

α	λ [Å]	θ	p	efficacité cas $E_\parallel$	efficacité cas $H_\parallel$
73°30′	1216	33°36′	+1	σ_∞ : 0.17 or : 0.08	σ_∞ : 0.72 or : 0.03
81°30′	164	61° 8′	+2	σ_∞ : 0.30 or : 0.08	σ_∞ : 0.48 or : 0.06

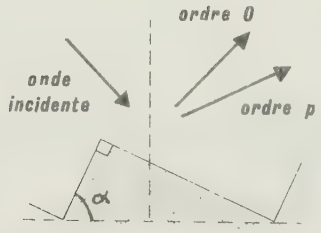


Fig. 1. Dispositif d'emploi d'un réseau dans l'ultraviolet.

été choisis à partir de considérations intuitives pour obtenir un fort "effet de blaze".

Les calculs ont été faits chaque fois en considérant d'abord le métal à une conductivité infinie (σ_∞), puis en attribuant à l'or l'indice $n = \nu + i\chi$ correspondant à la longueur d'onde utilisées (n = 1,18 + i0,95 pour λ = 1216 Å et n = 0,905 + i0,07 pour λ = 164 Å). Les cas $E_\parallel$ et $H_\parallel$ désignent respectivement les deux cas fondamentaux de polarisation pour lesquels le champ électrique ou magnétique est parallèle aux sillons du réseau.

Il faut noter que pour λ = 164 Å, limite inférieure des longueurs d'onde utilisées, trente quatre ondes planes progressives sont diffractées et il est bien évident que pour ce calcul, la méthode numérique est poussée à ses extrêmes limites. On ne peut donc pas espérer une très bonne précision sur le résultat, nous estimons qu'elle est meilleure que 10%.

L'efficacité du réseau recouvert d'or est évidemment très inférieure à celle du réseau infiniment conducteur; on constate cependant dans ce premier cas un "effet de blaze" important et souvent plus accusé que pour le second: l'efficacité dans l'ordre qui nous intéresse est rarement inférieure à 50% de la somme totale des efficacités dans tous les ordres de diffraction. Les considérations intuitives sur "l'effet de blaze" ont donc, sur cet example, conduit à une valeur raisonnable de l'"angle de blaze".

3. Efficacité des réseaux d'aluminium dans le visible

Nous nous sommes intéressés à l'efficacité ξ_{-1} de trois réseaux, un réseau à profil sinusoïdal et deux réseaux échelettes, utilisées dans un montage de Littrow pour l'ordre −1.

Comme précédemment, nous comparons les résultats obtenus en attribuant au réseau une conductivité infinie, puis celle de l'aluminium, et chaque fois nous traitons les deux cas fondamentaux de polarisation.

3.1. Cas $E_\parallel$

A la vue des figs. 2a, 3a, 4a, on déduit sans peine que, pour cette polarisation, l'aluminium se comporte pratiquement comme un métal infiniment conducteur. Si l'on veut préciser l'écart, on peut noter que le rapport des deux efficacités est égal, avec une très bonne approximation, à la réflectivité de l'aluminium pour la longueur d'onde concernée. Dans la gamme explorée sur ces courbes, cette réflectivité se situe autour de 90%.

3.2. Cas $H_\parallel$

Les figs. 2b et 3b montrent de toute évidence que la remarque précédente ne peut être élargie à ce cas de polarisation.

Dans la zone de longueur d'onde située au-dessus des anomalies de Wood (à droite sur les figures), les deux courbes restent régulières, l'affaiblissement d'efficacité est toutefois supérieur à celui observé pour le cas $E_\parallel$.

Par contre, dans la zone où les anomalies de Wood commencent à apparaître (à gauche sur les figures), les deux courbes sont très dissemblables et l'efficacité du réseau d'aluminium peut être très supérieure ou très inférieure à celle du réseau infiniment conducteur. Ce phénomène peut être très important en pratique: même si l'on s'astreint à ne pas utiliser les réseaux dans la zone des anomalies de Wood, on doit constater sur la fig. 2b que le "blaze" passe d'une valeur égale à 0,82 pour λ = 0,7 μ à une valeur de 0,6 pour λ = 0,75 μ.

Le phénomène qui est apparu clairement sur les figs. 2b et 3b n'est cependant pas général, ainsi que le montre la fig. 4b: pour ce réseau échelette, les deux courbes restent très semblables.

4. Conclusion

Contrairement à ce qui était généralement admis, on doit maintenant constater que *l'aluminium* †

† La présence d'une éventuelle couche mince d'oxyde ne semble pas avoir d'influence sensible pour les radiations visibles.

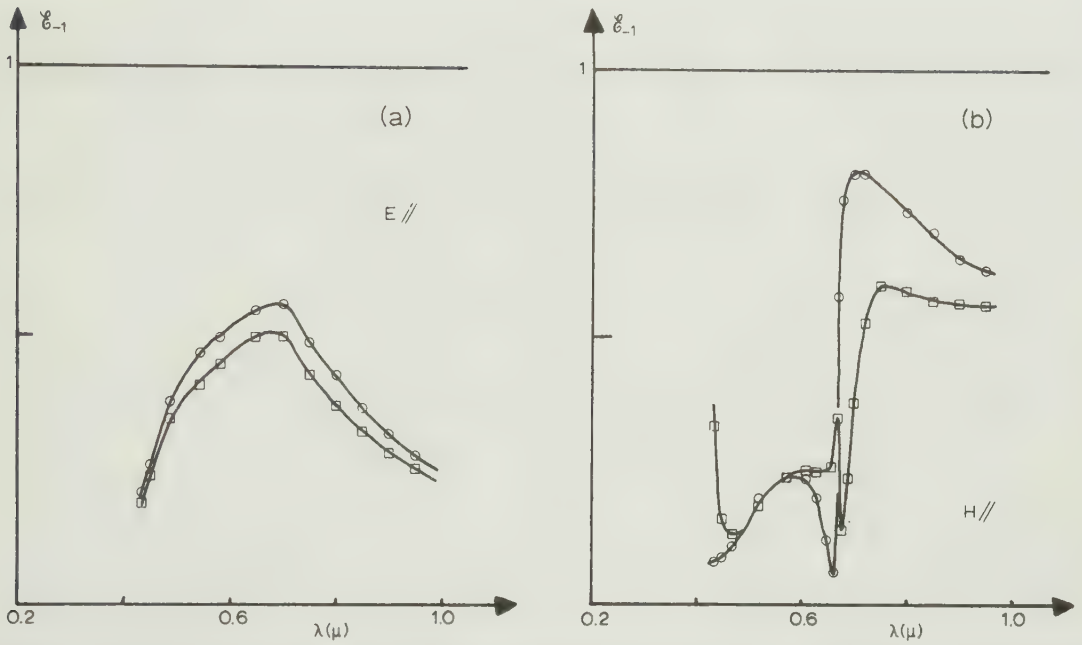


Fig. 2. Efficacité en montage de Littrow d'un réseau sinusoidal de 1000 traits/mm dont le rapport de la hauteur au pas est égal à 0.2; □ réseau infiniment conducteur, ○ réseau en aluminium.

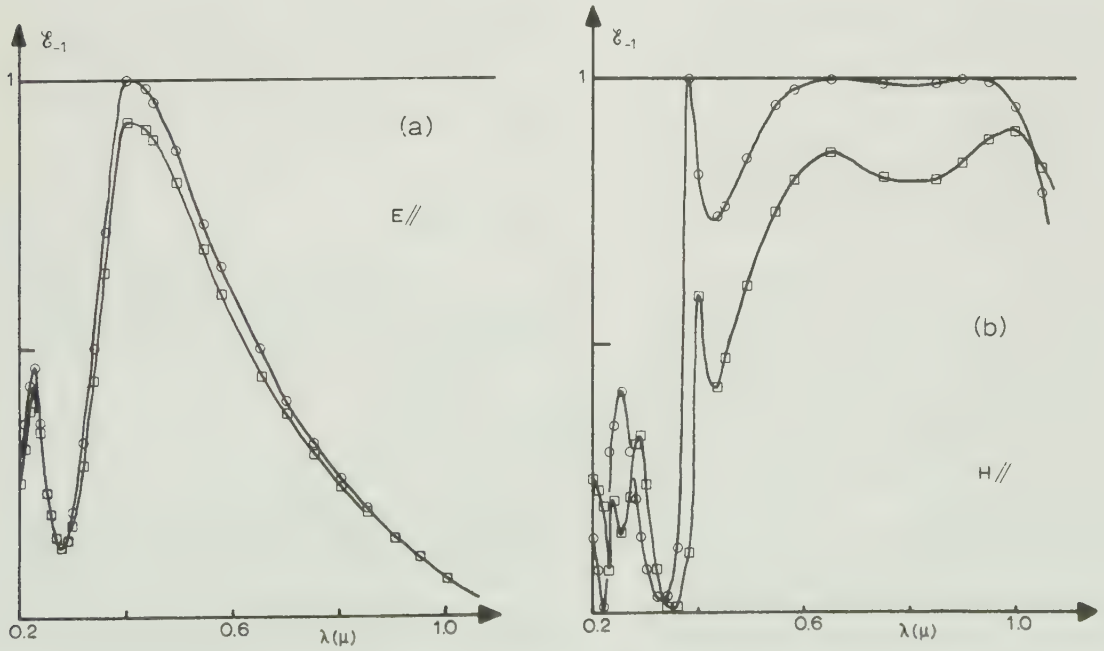


Fig. 3. Efficacité en montage de Littrow d'un réseau échelette de 1800 traits/mm dont l' "angle de blaze" est égal à 35°; □ réseau infiniment conducteur, ○ réseau en aluminium.

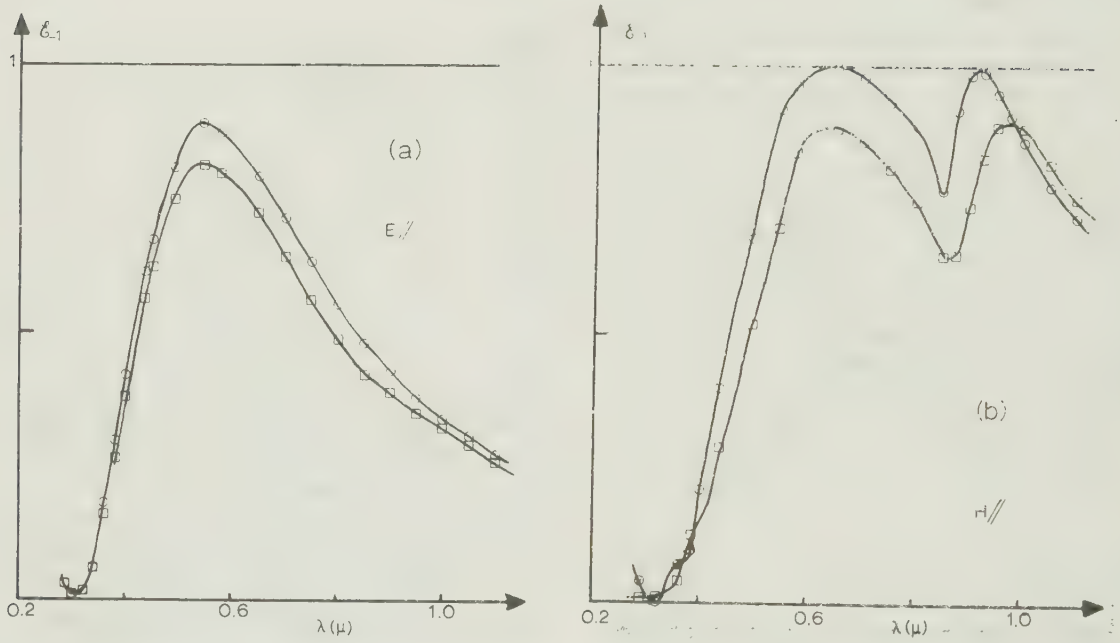


Fig. 4. Efficacité en montage de Littrow d'un réseau échelette de 800 traits/mm dont l' "angle de blaze" est égal à 15° ; □ réseau infiniment conducteur, ○ réseau en aluminium.

utilisé pour la fabrication des réseaux de diffraction ne doit pas, même dans le visible, être systématiquement considéré comme infiniment conducteur et ceci étant vrai pour un des deux cas fondamentaux de polarisation est vrai pour la lumière naturelle.

Sans vouloir leur donner une valeur absolue, il semble que les deux règles suivantes puissent être énoncées, dans le visible, pour les deux cas de polarisation:

– dans les parties où la courbe d'efficacité d'un réseau infiniment conducteur se comporte de manière régulière, sans brusques variations (ce qui est généralement vérifié pour le cas $E_{\parallel}$, la courbe d'efficacité d'un réseau en aluminium ayant les mêmes caractéristiques géométriques se déduit de la première par une affinité dont le rapport est voisin de la valeur de la réflectivité de l'aluminium.

– dans les parties où la courbe d'efficacité d'un réseau infiniment conducteur subit de brusques variations, on peut craindre que l'efficacité du réseau d'aluminium soit très différente et ceci peut modifier notablement la hauteur et la position du "blaze".

L'exploitation actuelle de nos programmes nous permettra sans doute de préciser ces règles, nous espérons évidemment pouvoir en énoncer quelques autres concernant la zone de l'ultraviolet.

Remerciements

L'auteur remercie Monsieur le Professeur R. Petit qui a encouragé ce travail en vue d'une exploitation systématique dans l'ultraviolet.

Références

[1] D. Maystre, Opt. Commun. 6 (1972) 50.
[2] R. Petit, D. Maystre et M. Nevière, communication à l'I.C.O.9, Congrès de Santa-Monica (Californie), octobre 1972.
[3] W.R. Hunter (U.S. Naval Research Laboratory - Washington), communication personnelle.

Volume 5, number 1 OPTICS COMMUNICATIONS April 1972

PRINCIPE D'UN SPECTROMETRE A RESEAU A TRANSMISSION CONSTANTE

D. MAYSTRE et R. PETIT
Université de Provence, Laboratoire d'Optique Electromagnétique, centre de St-Jérôme – 13 Marseille 13e, France

Reçu le 21 décembre 1971

An unusual use of the echelette grating (incident wavevector is not perpendicular to the grooves) seems to allow the construction of a spectrometer (or monochromator) the high transmission of which does not depend on the wavelength.

1. Etude d'un cas particulier de diffraction conique

Soit un réseau échelette illimité infiniment conducteur dont les sillons sont parallèles à Oz et dont les caractéristiques du profil sont précisées sur la fig. 1. Considérons le trièdre $OXYz$ de vecteurs unitaires $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$ déduit du trièdre $Oxyz$ par rotation d'un angle α autour de Oz, et le champ électromagnétique $\boldsymbol{E}$ résultant de la superposition de deux ondes planes $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ dont les directions de propagation $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_2$ sont perpendiculaires à OX et symétriques par rapport à Oz:

$$\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 A \exp\,[ik\hat{\boldsymbol{u}}_1 \cdot \boldsymbol{r}]$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_1 A \exp\,[ik(-Y\cos\phi - z\sin\phi)]\ ,$$

$$\boldsymbol{E}_2 = -\hat{\boldsymbol{e}}_1 A \exp\,[ik\hat{\boldsymbol{u}}_2 \cdot \boldsymbol{r}]$$

$$= -\hat{\boldsymbol{e}}_1 A \exp\,[ik(Y\cos\phi - z\sin\phi)]\ .$$

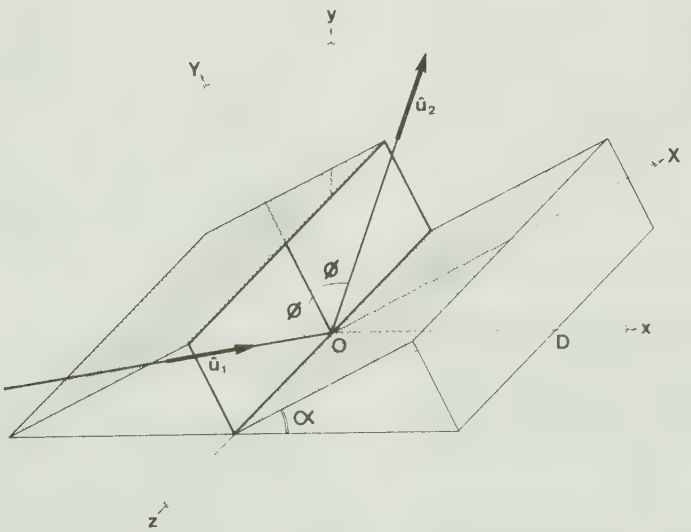


Fig. 1. Un ca particulier de diffraction conique: OD = d.

Ce champ $\boldsymbol{E}$ est perpendiculaire aux petites facettes du réseau et on vérifie qu'il est nul sur les grandes facettes si la longueur d'onde λ est liée au pas d par la relation:

$$2\,d \sin\alpha \cos\phi = \lambda\,. \qquad (1)$$

Ainsi, lorsque le réseau est éclairé par l'onde plane $\boldsymbol{E}_1$, le champ diffracté se réduit à la seule onde plane $\boldsymbol{E}_2$ puisque $\boldsymbol{E}$ vérifie la condition aux limites imposée par le métal ($\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{E} = 0$). On vérifiera en se reportant à [1] ou [2] que $\boldsymbol{E}_2$ représente alors l'onde diffractée dans l'ordre -1. Ceci généralise un résultat connu lorsque $\phi = 0$ [3] et on retiendra que pour une polarisation convenable ($\boldsymbol{E}$ perpendiculaire aux sillons) l'efficacité E_{-1} reste égale à 1 quand, partant de la position classique ($\phi = 0$), λ et ϕ varient de sorte que la projection du vecteur d'onde incidente sur le plan xOy reste constante [énoncé équivalent à la relation (1)].

Que devient cette propriété dans l'autre cas fondamental de polarisation ($\boldsymbol{H}$ perpendiculaire aux sillons)? L'examen attentif des équations intégrales obtenues dans une précédente publication [1] montre que, dans ces conditions, l'efficacité E_{-1} reste également constante. On notera qu'elle n'est plus égale à l'unité mais à la valeur obtenue pour $\phi = 0$, valeur que l'on peut déterminer à partir de l'angle α en consultant [4] pour le cas $\boldsymbol{E}/\!/$: elle reste supérieure à 0,8 pour α plus petit que 15° et est déjà voisine de 1 pour $\alpha = 10°$ [4].

La vérification expérimentale a été effectuée en lumière naturelle sur un réseau commercial dont l'efficacité était chiffrée par le constructeur à 70% pour $\lambda = 0{,}78\ \mu$m et pour le montage de Littrow. Les valeurs mesurées ont été supérieures à 60% entre 0,3 μm et 0,7 μm.

2. Principe d'un spectromètre à transmission constante

La fig. 2 représente un miroir M lié au réseau R. Si la relation (1) est satisfaite, une onde incidente dont la direction de propagation $\hat{\boldsymbol{u}}$ est parallèle à la petite facette donne naissance à une onde diffractée dont la direction de propagation $\hat{\boldsymbol{u}}''$ se déduit de $\hat{\boldsymbol{u}}$ par symétrie sur le plan de la grande facette; cette onde diffractée se réfléchit sur le miroir M pour engendrer une onde plane dont la direction de propagation $\hat{\boldsymbol{u}}'$ se déduit de $\hat{\boldsymbol{u}}''$ par symétrie sur le plan du miroir. Quel

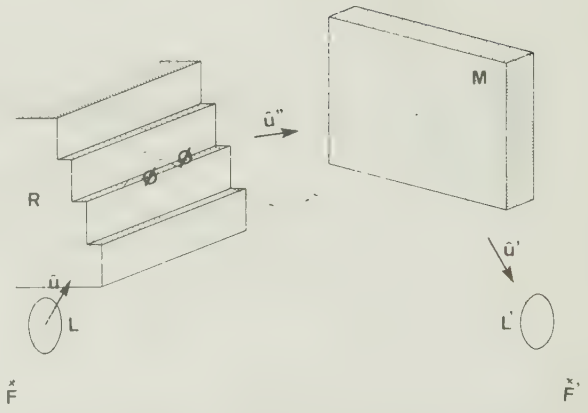


Fig. 2. Principe du spectromètre.

que soit λ, l'angle des vecteurs $\hat{\boldsymbol{u}}$ et $\hat{\boldsymbol{u}}'$ est constant; il est par example égal à π si le miroir est perpendiculaire aux grandes facettes.

Soient deux lentilles L et L′ de foyers F et F′ et dont les axes focaux sont respectivement parallèles à $\hat{\boldsymbol{u}}$ et $\hat{\boldsymbol{u}}'$. Si un point source polychromatique est placé en F, la rotation de l'ensemble RM (autour d'un axe perpendiculaire aux petites facettes) permet de faire défiler en F′ les images monochromatiques correspondant aux différentes valeurs de λ. On a là le principe d'un spectromètre (ou d'un monochromateur) dont la transmission, indépendante de la longueur d'onde, reste très voisine de 1 quelle que soit la polarisation, et même en lumière naturelle, pourvu que l'angle α (fig. 1) soit suffisamment faible.

Cet appareil présente à première vue un défaut difficilement tolérable par un opticien: si on remplace le point source F par une fente lumineuse f passant par F, le support de son image f′ dépend généralement de λ: la fente image tourne quand λ varie. On peut pallier cet inconvénient en compliquant légèrement le montage.

3. Suggestion pour une réalisation pratique

La fig. 3 représente schématiquement le montage de la fig. 2 complété par un miroir M_0; le réseau R, dont les petites facettes sont parallèles au plan de figure, est représenté par un segment parallèle à la trace des grandes facettes; les miroirs M et M_0 sont représentés par leurs traces. Comme dans le paragraphe

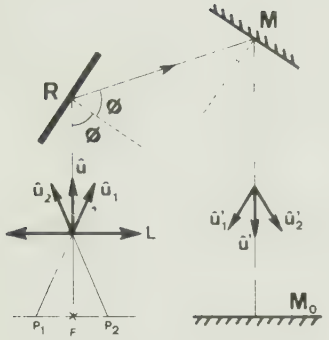


Fig. 3. Schéma d'un spectromètre à fentes.

précédent, R et M sont liés et susceptibles de tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan de figure.

Une onde plane de longueur d'onde λ se propageant suivant $\hat{u}$ donne (si la relation (1) est vérifiée) une onde plane qui se propage suivant $\hat{u}'$ *quel que soit* λ. Le miroir M_0 est perpendiculaire à cette direction $\hat{u}'$.

Deux points P_1 et P_2 du plan focal de L, symétriques par rapport à F, donnent naissance à deux ondes planes, dont les vecteurs d'ondes $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont symétriques par rapport à $\hat{u}$. Après traversée de RM, on obtient deux ondes se propageant suivant $\hat{u}'_1$ et $\hat{u}'_2$. Si P_1 et P_2 sont suffisamment voisins de F, il en résulte qu'au second ordre près, $\hat{u}'_1$ et $\hat{u}'_2$ sont symétriques par rapport à $\hat{u}'$.

Un point lumineux placé en P_1 donne naissance à une onde se propageant suivant $\hat{u}'_1$. Celle-ci se réfléchit sur M_0 et donne une onde qui se propage suivant $-\hat{u}'_2$ et qui, d'après le principe de retour inverse, valable pour l'ensemble MRL [5] converge finalement en P_2. Autrement dit, si dans le plan focal de L, on place au voisinage de F une petite fente objet f polychromatique, on peut, par rotation de RM, faire défiler sur le segment fixe f' symétrique de f par rapport à F l'image de f correspondant aux différentes valeurs de λ. Ceci a été vérifié expérimentalement. On notera que la forte dispersion dûe au double passage sur le réseau doit permettre de compenser la perte de luminosité dûe aux nombreuses réflexions.

La fig. 4 donne le principe d'un montage qui permet de séparer nettement les fentes d'entrée et de sortie au prix d'une légère complication mécanique: les ensembles RM et R'M' doivent en effet tourner en sens inverse pour rester symétriques par rapport au plan perpendiculaire à $\hat{u}'$.

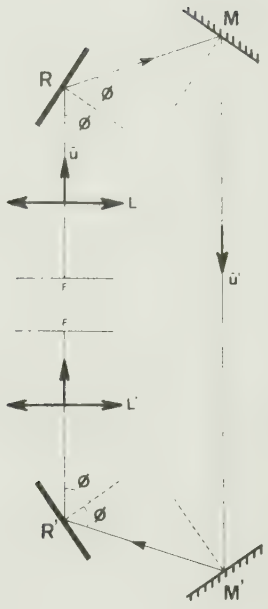


Fig. 4. Schéma d'un spectromètre à fentes.

4. Conclusion

Il semble donc que l'emploi de la diffraction conique permette de réaliser un spectromètre à transmission constante sur un intervalle d'octave $(\lambda_0 - 2\lambda_0)$. Il suffit d'utiliser un réseau donnant, dans le montage de Littrow, un fort "effet de blaze" pour une longueur d'onde λ_B supérieure à $2\lambda_0$. Malheureusement, bien que les vérifications expérimentales nécessaires aient été réalisées, nous ne sommes pas en mesure d'envisager la construction d'un prototype au laboratoire.

Remerciement

Les auteurs tiennent à remercier les chercheurs du département d'Optique de l'Université de Provence (Centre d'études des couches minces associé au C.N.R.S.) pour leur aide sur le plan expérimental.

Références

[1] D. Maystre et R. Petit, Opt. Commun. 4 (1971) 97.

P 7

[2] M. Nevière et M. Cadilhac, Opt. Commun. 4 (1971) 13.
[3] A. Maréchal et G.W. Stroke, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 249 (1959) 2042.
[4] D. Maystre et R. Petit, Nouv. Rev. d'Opt. Appl. 2 (1971) 115.
[5] D. Maystre et R. Petit, Opt. Commun. 4 (1972) 380.

Volume 4, number 5 OPTICS COMMUNICATIONS January 1972

APPLICATION DES PROPRIETES DES RESEAUX ECHELETTES AU FILTRAGE DES LONGUEURS D'ONDE

D. MAYSTRE et R. PETIT
Groupe d'Optique Electromagnétique, Université de Provence, Centre de Saint-Jérôme, 13 Marseille 13e, France

Reçu le 9 décembre 1971

It seems possible to obtain band-pass filters with suitable grating arrangements. The transmission of these filters is very close to unity and the band-width tunable. They are especially convenient for infrared radiation but require the use of polarized light.

1. INTRODUCTION

L'examen des courbes présentées dans un précédent article [1], ainsi que d'autres non publiées (fig. 1), suggère l'utilisation des réseaux échelettes pour la fabrication de filtres passe haut, passe bas ou passe bande. Cet article est essentiellement consacré à la réalisation en lumière polarisée d'un filtre passe bande à forte transmission, à flancs très raides et à largeur de bande réglable.

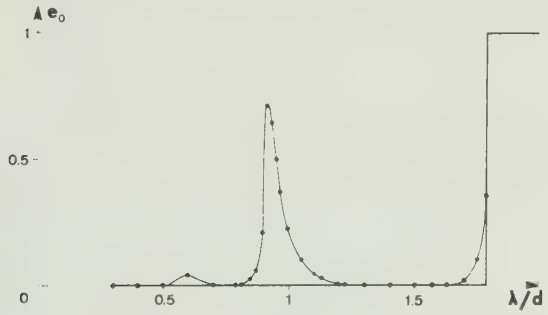


Fig. 1. Efficacité dans l'ordre 0 d'un réseau échelette pour $\alpha = 38^{\circ}$ et $\theta = 52^{\circ}$ (fig. 2), le champ magnétique étant parallèle aux sillons.

2. RAPPELS THÉORIQUES

2.1. *Proposition* 1

Soit (fig. 2) un réseau éclairé par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 2d \sin\theta$ sous l'incidence θ, le champ magnétique étant parallèle aux sillons. On sait [1] que l'efficacité $e_{-1}(\theta)$ dans l'ordre -1 est égale à l'unité pour deux valeurs θ_1 et θ_2 de l'angle θ respectivement égaux à α et $\frac{1}{2}\pi - \alpha$. Corrélativement, l'efficacité e_0 dans l'ordre 0 s'annule.

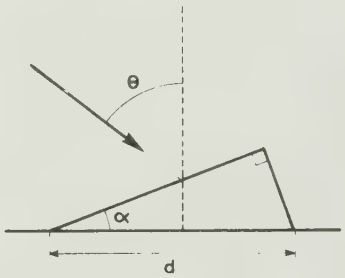


Fig. 2. Notations utilisées.

2.2. *Proposition* 2 *ou "principe du retour inverse"*

Soit un réseau, éclairé par une onde plane de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k}_d$ le vecteur d'onde de l'une des ondes diffractées. La "formule des réseaux" ou mieux son interprétation géométrique [2] montre immédiatement que le vecteur $-\boldsymbol{k}$ est associé à l'une des ondes diffractées par le réseau quand il est éclairé par une onde incidente de vecteur d'onde $-\boldsymbol{k}^d$. On montre que son efficacité est la même dans les deux cas; elle est donc indépendante du sens de propagation de la lumière. La démonstration complète de ce "théorème de réciprocité" étant délicate [3-5], nous en donnons en annexe une démonstration simplifiée reposant sur la conservation de l'énergie et la linéarité des équations de Maxwell.

3. PRINCIPE DU FILTRAGE PAR RESEAU

Si le champ magnétique est parallèle aux sillons, on sait [6] que, comme le rappelle la

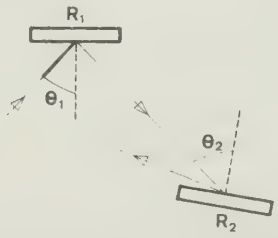


Fig. 3. Principe du filtre passe bande.

fig. 1, l'efficacité $e_0(\lambda/d)$ est, pour une incidence θ et dans le voisinage d'une longueur d'onde de coupure $\lambda_c = d(1+\sin\theta)$, très voisine d'une fonction de Heavyside $H(\lambda - \lambda_c)$. Le choix des angles θ et α (fig. 2) permet d'ailleurs d'approcher au mieux cette fonction qui représente la transmission d'un filtre passe haut idéal. Ce choix nécessite évidemment une étude numérique [7] guidée par des considérations théoriques (par exemple, annulation de e_0 conformément à la proposition 1). Pour la même incidence, et dans la mesure où seuls existent les ordres 0 et -1 ($\frac{1}{2}\lambda_c < \lambda < \lambda_c$), l'efficacité e_{-1}, égale à $1 - e_0$, est très voisine de $H(\lambda_c - \lambda)$ †. En conséquence, étant donnés θ_1 et θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$), la mise en série de deux réseaux R_1 et R_2 successivement attaqués sous les incidences θ_1 et θ_2 (fig. 3) et travaillant respectivement dans les ordres 0 et -1 constitue un filtre passe bande dont la transmission τ (fig. 4) est très voisine de $H(\lambda - \lambda_1)\,H(\lambda_2 - \lambda)$ avec

$$\lambda_1/d = 1 + \sin\theta_1, \qquad \lambda_2/d = 1 + \sin\theta_2.$$

Comme la direction de propagation de l'onde transmise par ce filtre rudimentaire dépend de λ, il est souhaitable de le modifier légèrement.

4. SCHEMA D'UN FILTRE PASSE BANDE

La fig. 5 donne, grandeur nature, le schéma du montage calculé pour $\lambda_1 = 14\ \mu$m et $\lambda_2 = 15\ \mu$m en négligeant de très faibles corrections imposées par la géométrie et en assimilant les efficacités à des fonctions de Heavyside. Le réseau R_1 du paragraphe précédent a été remplacé par deux réseaux identiques R_1' et R_1'', tous deux utilisés dans l'ordre zéro et parallèles entre eux. L'efficacité de ce couple R_1', R_1'' est plus proche d'une fonction de Heavyside que celle de R_1; l'onde transmise a même direction

† Ceci montre que la propriété signalée par Wirgin pour des réseaux créneaux [8] s'applique aussi aux réseaux échelettes.

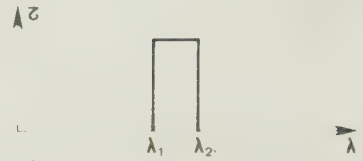


Fig. 4. Transmission idéale du filtre passe bande.

de propagation que l'onde incidente. Le réseau R_2 a été remplacé par le couple de réseaux R_2', R_2'' parallèles entre eux et fonctionnant tous deux dans l'ordre -1 avec la même efficacité (proposition 2). L'onde transmise par ce couple a encore même direction de propagation que l'onde qu'il reçoit, ce qui élimine la dispersion angulaire signalée à la fin du paragraphe 3. Une rotation du couple R_1', R_1'' (resp. R_2', R_2'') est susceptible de modifier λ_1(resp. λ_2), la fabrication d'un appareil ainsi réglable nécessitant cependant une étude géométrique soignée.

Aucune réalisation pratique n'a été effectuée, mais le laboratoire est prêt à apporter son aide théorique à tout expérimentateur intéressé par ce montage ou par le montage plus simple mais moins souple qui consiste à utiliser un pic de transmission semblable à celui que l'on observe au voisinage de $\lambda/d = (1+\sin\theta)/2$ (apparition de l'ordre -2) sur la fig. 1.

Bien que les considérations développées dans cet article s'appliquent à tout le domaine spectral, elles semblent spécialement intéressantes pour l'infrarouge: les métaux peuvent alors être considérés comme infiniment conducteurs, le profil des réseaux peut être réalisé avec précision ... et enfin, les techniques de filtrage semblent, dans ce domaine, moins avancées que pour le domaine visible.

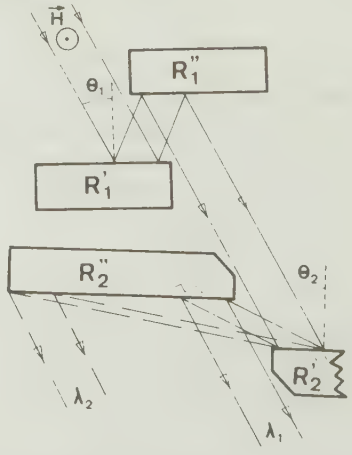


Fig. 5. Schéma d'un filtre passe bande à quatre réseaux: $\theta_1 = 26{,}4^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, $\lambda_1 = 14\ \mu$m, $\lambda_2 = 15\ \mu$m.

ANNEXE : *Démonstration de la proposition* 2

Soient θ_1 et θ_2 deux angles compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$ liés par la relation: $\sin\theta_2 = -\sin\theta_1 + \lambda/d$ et tels que $|\sin\theta_1 + n\lambda/d|$ ne soit inférieur à 1 que si n est égal à 0 ou -1.

Considérons sur le cercle trigonométrique (fig. 6) les points D_1 et D_2, d'angles polaires $\frac{1}{2}\pi - \theta_1$ et $\frac{1}{2}\pi + \theta_2$ ainsi que leurs symétriques I_1 et I_2 par rapport à l'axe Oy directement perpendiculaire à l'axe polaire Ox.

Soit un réseau de pas d, dont le plan moyen, perpendiculaire au plan de figure, coupe ce dernier suivant Ox. Il est éclairé par deux ondes planes de même longueur d'onde λ:
- l'une, d'amplitude complexe a_1 se propage suivant $\overrightarrow{I_1O}$
- l'autre, d'amplitude complexe a_2 se propage suivant $\overrightarrow{I_2O}$.

A l'infini (très loin du réseau), le champ diffracté est la superposition de deux ondes planes:
- l'une, d'amplitude complexe b_1 se propageant suivant $\overrightarrow{OD_1}$
- l'autre, d'amplitude complexe b_2 se propageant suivant $\overrightarrow{OD_2}$.

La conservation de l'énergie [2] s'écrit ici:

$$a_1\bar{a_1}\cos\theta_1 + a_2\bar{a_2}\cos\theta_2 = b_1\bar{b_1}\cos\theta_1 + b_2\bar{b_2}\cos\theta_2 .$$

Si a et b sont les matrices colonnes définies par:

$$a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix},$$

et M une matrice carrée dont le coefficient M_{ij} est l'amplitude de l'onde diffractée suivant $\overrightarrow{OD_i}$ lorsque le réseau est éclairé par *une seule onde plane* d'amplitude unité se propageant suivant $\overrightarrow{I_jO}$, d'après la linéarité des équations de Maxwell: $b = Ma$.

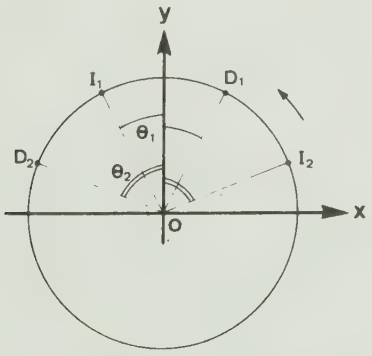


Fig. 6. Principe du retour inverse.

Il est commode d'introduire la matrice S définie par:

$$S_{ij} = M_{ij}(\cos\theta_i/\cos\theta_j)^{1/2} .$$

La conservation de l'énergie montre que S est une matrice unitaire, c'est-à-dire une matrice qui conserve la norme hermitienne.

Nous pouvons reprendre les considérations précédentes en remplaçant systématiquement D par I, I par D et en désignant par a'_i, b'_i, a', b', M' et S' les différents êtres mathématiques ainsi définis.

Si $u(x, y)$ est une fonction vérifiant l'équation de Helmholtz au dessus du réseau et une condition aux limites de type Dirichlet ou Neumann, sur le réseau, la fonction $\bar{u}(x, y)$ vérifie aussi l'équation de Helmholtz et la condition aux limites. Loin du réseau, les deux fonctions $u(x, y)$ et $\bar{u}(x, y)$ se décomposent en une somme d'ondes planes (développement de Rayleigh). Les directions de propagation de ces différentes ondes planes sont les mêmes pour u et $\bar{u}$ mais les sens de propagation sont opposés. Il en résulte que $a' = \bar{b}$ implique $b' = \bar{a}$ et, par suite, que $M\bar{M}'$ et $S\bar{S}'$ sont tous deux égaux à la matrice unité:

$$M\bar{M}' = S\bar{S}' = I .$$

Or, puisque S est unitaire: $S\bar{S}^t = I$, donc $S' = S^t$, c'est-à-dire $S'_{ij} = S_{ji}$.

L'égalité de la norme hermitienne des deux membres n'est autre que l'expression mathématique de la proposition 2. Celle-ci contient comme cas particulier l'invariance du pouvoir réflecteur (efficacité dans l'ordre zéro) par inversion du sens de propagation ou rotation du réseau de 180° autour d'un axe perpendiculaire à son plan moyen [6].

REFERENCES

[1] D. Maystre et R. Petit, Nouv. Rev. d'Opt. Appl. 2 (1971) 115.
[2] R. Petit, Rev. d'Opt. 6 (1966) 249.
[3] J. L. Uretsky, Ann. Phys. 33 (1965) 400.
[4] A. Wirgin, Thèse, no. C. N. R. S. A. O. 1429 (1967).
[5] M. Nevière, M. Cadilhac et R. Petit, Communication orale, International Symposium on Electromagnetic Wave Theory, Tbilissi, URSS (1971).
[6] R. Petit, Opt. Acta 14 (1967) 301.
[7] D. Maystre et R. Petit, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 271B (1970) 400.
[8] A. Wirgin, Nouv. Rev. d'Opt. Appl. 1 (1970) 161.

Volume 7, number 4 OPTICS COMMUNICATIONS April 1973

DIFFRACTION PAR UN RESEAU LAMELLAIRE INFINIMENT CONDUCTEUR EN PRESENCE DE DIOPTRES PARALLELES AUX LAMELLES

J.L. ROUMIGUIERES, D. MAYSTRE et R. PETIT
Groupe d'Optique Electromagnétique, Université de Provence, Saint Jérome, 13397 Marseille, Cédex 4, France

Reçu le 12 fevrier 1973

The paper is concerned with a numerical study suggested by difficulties encountered when producing micro integrated circuits by contact masking techniques; the mask is supposed to be a lamellar grating.

Le problème de la diffraction par un réseau lamellaire infiniment conducteur en présence de dioptres parallèles aux lamelles mérite d'être étudié en vue d'applications à la fabrication de circuits intégrés par des techniques de masquage [1].

Comme dans une de nos récentes publications [2], l'espace est rapporté à un trièdre orthonormé $Oxyz$ de vecteurs unitaires $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ et nous adoptons une dépendance de temps en $\exp(-i\omega t)$. Une onde plane incidente

$$E^i = \hat{e}_z \exp[+ik_0(x \sin\theta - y \cos\theta)]$$

que nous supposons polarisée parallèlement à Oz pour simplifier l'exposé, illumine un réseau lamellaire infiniment conducteur, plongé dans un milieu inhomogène stratifié dont l'indice est une fonction constante par morceau de la seule variable y (fig. 1).

La lame L_1 est le support du réseau et, par exemple, L_3 est une couche mince de résine photosensible, L_4 une couche mince de silice, le milieu d'indice ν_5 étant du silicium. Il s'agit de déterminer le champ électrique total $E(x, y)$ qui s'établit, compte tenu de la diffraction et des réflexions multiples sur les différentes dioptres. Nous supposons, comme c'est le cas en pratique, que le pas d du réseau est de l'ordre de la longueur d'onde λ_0 dans le vide ($\lambda_0 = 2\pi/k_0$); il est donc nécessaire de faire appel aux équations de l'électromagnétisme: on sait [2] que si $-\frac{1}{2}h < y < \frac{1}{2}h$ et $0 < x < c$:

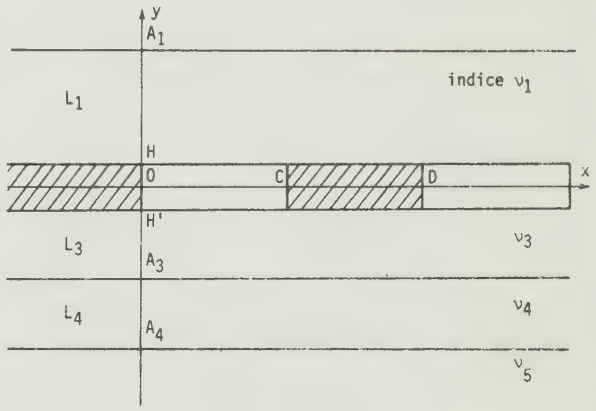


Fig. 1. OD = d; OC = c; OH = OH' = $\frac{1}{2}h$; $HA_1 = l_1$; $H'A_3 = l_3$; $A_3A_4 = l_4$. Les lamelles du réseau sont parallèles aux dioptres délimitant les différentes couches homogènes.

$$E(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\mu_n y) + b_n \sin(\mu_n y)] \sin(n\pi x/c), \tag{1}$$

avec $\mu_n^2 = k_2^2 - n^2\pi^2/c^2$, $k_2^2 = k_0^2\nu_2^2$.
Dans chacune des bandes où l'indice est constant, le champ est décrit par un développement de Rayleigh; si on pose:

$$nK + k_0 \sin\theta = u_n, \quad \chi_{in}^2 = k_0^2\nu_i^2 - u_n^2,$$

nous pouvons donc écrire, en tenant compte de la condition d'ondes sortantes pour $|y| \to \infty$:

$$E(x,y) = E^{i}(x,y) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_{0n} \exp(iu_n x + i\chi_{0n} y), \quad \text{si } y > \tfrac{1}{2}h + l_1; \tag{2}$$

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(iu_n x)\,[B_{1n}\exp(i\chi_{1n}y) + C_{1n}\exp(-i\chi_{1n}y)], \quad \text{si } \tfrac{1}{2}h < y < \tfrac{1}{2}h + l_1; \tag{3}$$

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(iu_n x)\,[B_{3n}\exp(-i\chi_{3n}y) + C_{3n}\exp(i\chi_{3n}y)], \quad \text{si } -\tfrac{1}{2}h - l_3 < y < -\tfrac{1}{2}h; \tag{4}$$

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(iu_n x)\,[B_{4n}\exp(-i\chi_{4n}y) + C_{4n}\exp(i\chi_{4n}y)], \quad \text{si } -\tfrac{1}{2}h - l_3 - l_4 < y < -\tfrac{1}{2}h - l_3; \tag{5}$$

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(iu_n x) B_{5n} \exp(-i\chi_{5n}y), \quad \text{si } y < -\tfrac{1}{2}h - l_3 - l_4. \tag{6}$$

A la traversée de chaque dioptre, le champ

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(iu_n x) E_n(y)$$

et sa dérivée normale sont continus. Ceci entraîne la continuité de $E_n(y)$ et $\mathrm{d}E_n/\mathrm{d}y$. En explicitant ces continuités pour chacun des dioptres que l'on rencontre en allant du milieu d'indice ν_5 vers le résesu, on trouve finalement que:

$$C_{3n} = N_{3n} B_{3n} \exp[2i\chi_{3n}(\tfrac{1}{2}h + l_3)], \tag{7}$$

N_{3n} étant un coefficient numérique d'expression relativement compliquée dépendant des caractéristiques géométriques et électromagnétiques des milieux situés au dessous du réseau.

De la même façon, en allant du vide vers le réseau, on établit que:

$$C_{1n} = \frac{2\chi_{00}}{\chi_{00} + \chi_{10}} \exp[i(\chi_{10} - \chi_{00})(\tfrac{1}{2}h + l_1)\delta_{n,0} + M_{1n} B_{1n}. \tag{8}$$

Le premier terme provient de l'existence du champ indicent et M_{1n} est un coefficient numérique (de nature analogue à N_{3n}) dépendant des caractéristiques de la lame L_1.

Ainsi, le problème se ramène à la détermination des quatre suites infinies de coefficients: a_n, b_n, B_{1n}, B_{3n} qui figurent dans les expressions (1), (3) et (4); en effet, si B_{1n} et B_{3n} sont connus, on obtient immédiatement C_{1n} et C_{3n} grâce à (7) et (8), tandis que les autres B_{jn} et C_{jn} s'obtiennent en traduisant successivement la continuité de $E_n(y)$ et de $\mathrm{d}E_n/\mathrm{d}y$ lors de la traversée des différents dioptres rencontrés en s'éloignant du réseau. En fait, pour les besoins du calcul numérique, les séries qui apparaîssent dans l'expression du champ sont nécessairement tronquées et chaque suite ne contient que N éléments.

Comme nous l'avons déjà fait dans une précédente publication [2], écrivons, pour $y = \frac{1}{2}h$ et $y = -\frac{1}{2}h$, la continuité de $E(x,y)$ et de la dérivée $\partial F/\partial y$ de la fonction $F(x,y)$ définie comme suit:

$$F(x,y) = E(x,y), \quad \text{si } 0 < x < c,$$

$$F(x,y) = 0, \quad \text{si } c < x < d.$$

Désignant par $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_3$ les matrices colonnes inconnues d'éléments respectifs a_n, b_n, B_{1n}, B_{3n}, on vérifiera, en se reportant éventuellement à [2], que ceci conduit à quatre équations matricielles:

$$\mathbf{D}_h \boldsymbol{B}_1 + \mathbf{P}_h \boldsymbol{a} + \mathbf{R}_h \boldsymbol{b} = \boldsymbol{S}_1, \tag{9}$$

$$\mathbf{Q}'_h \boldsymbol{B}_1 + \mathbf{P}'_h \boldsymbol{a} + \mathbf{R}'_h \boldsymbol{b} = \boldsymbol{S}_2, \tag{9'}$$

$$\mathbf{D}_{-h} \boldsymbol{B}_3 + \mathbf{P}_{-h} \boldsymbol{a} + \mathbf{R}_{-h} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

$$\mathbf{Q}'_{-h} \boldsymbol{B}_3 + \mathbf{P}'_{-h} \boldsymbol{a} + \mathbf{R}'_{-h} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}; \tag{10'}$$

$\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ sont des matrices colonnes, $\mathbf{D}_h$ et $\mathbf{D}_{-h}$ sont des matrices carrées diagonales et les autres matrices connues, des matrices carrées de rang N.

L'élimination de $\boldsymbol{B}_1$ entre (9) et (9') (élimination facile puisque $\mathbf{D}_h$ est diagonale, donc facilement in-

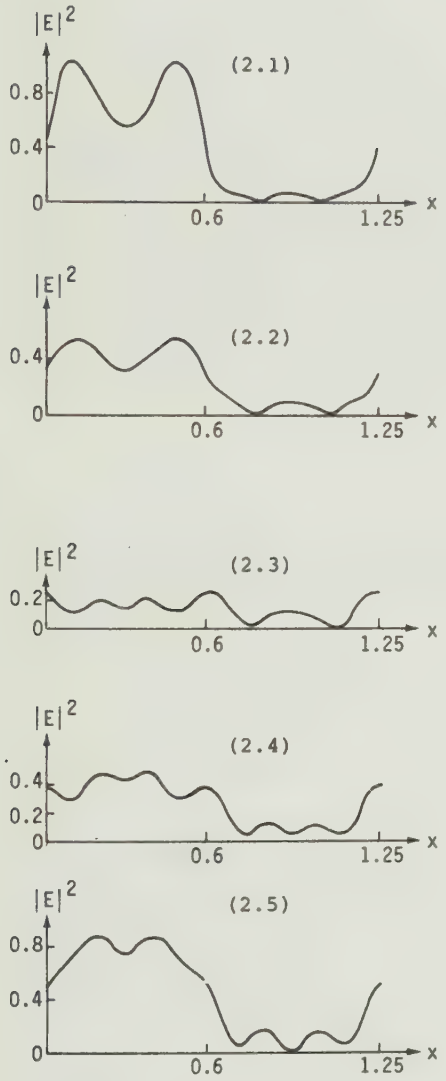


Fig. 2. Cas $H\,/\!/$. $l_1 = 500\ \mu m$, $\nu_1 = 1.60$, $h = 0.01\ \mu m$, $d = 1.25\ \mu m$, $c = 0.60\ \mu m$, $\nu_2 = 1.0$, $l_3 = 0.20\ \mu m$, $\nu_3 = 1.70$, $l_4 = 0.20\ \mu m$, $\nu_4 = 1.50$, $\nu_5 = 3.87 + 0.449\,i$, $\lambda_0 = 0.5790\ \mu m$. La figure 2, n donne le graphe de $|E|^2$ en fonction de x pour $y = -\frac{1}{2}h - \frac{1}{5}nl_3$.

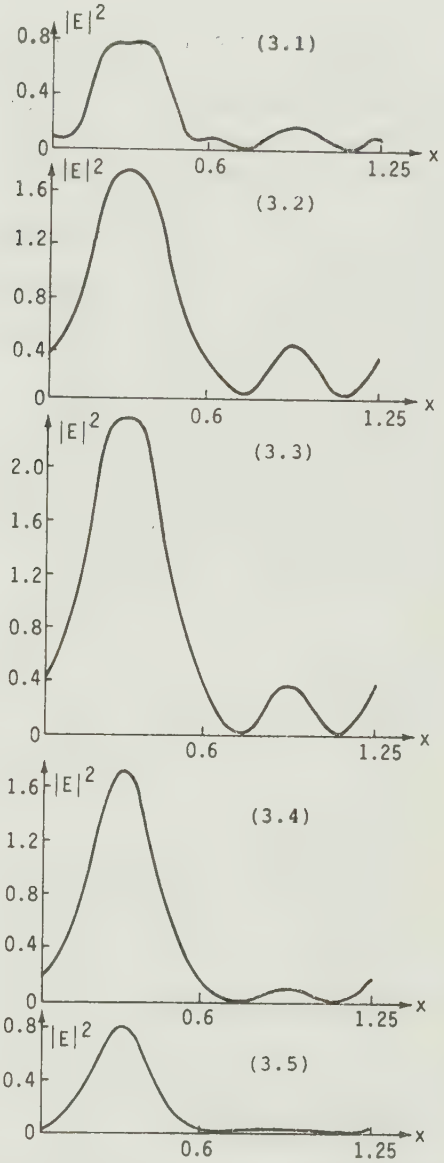


Fig. 3. Cas $E\,/\!/$ traité avec les valeurs numériques déjà utilisées pour les figs. 2.

versible) conduit à:

$$\mathbf{M}_1 a + \mathbf{M}_2 b = S. \tag{11}$$

L'élimination de B_3 entre (10) et (10′) conduit à:

$$\mathbf{M}_3 a + \mathbf{M}_4 b = 0, \tag{12}$$

les matrices $\mathbf{M}_j$ se déduisant aisément des précédentes.

Finalement, prenant comme inconnue la matrice colonne à $2N$ lignes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on peut remplacer (11) et (12) par:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

et on est ramené à l'inversion d'une matrice de rang $2N$. Le choix de N résulte d'expériences numériques: N doit être suffisamment grand pour que les valeurs approchées obtenues pour les divers coefficients des développements de Rayleigh vérifient les usuels critères de conservation de l'énergie avec une précision donnée à l'avance; il faut aussi, naturellement, que les résultats obtenus soient pratiquement inchangés quand on remplace N par N' ($N' > N$).

Nous disposons actuellement d'un programme pour chacun des deux cas fondamentaux de polarisation, notés $\boldsymbol{E}\,/\!/$ ou $\boldsymbol{H}\,/\!/$ suivant que $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{H}$ est parallèle aux lamelles du réseau (ce dernier cas se traite de façon analogue. On écrit le développement modal du champ magnétique entre deux lamelles successives, puis on traduit, pour $y = \frac{1}{2}h$ et $y = -\frac{1}{2}h$, la continuité de $\partial H/\partial y$ et de la fonction $G(x, y)$ égale à $H(x, y)$ pour $0 < x < c$ et à zéro pour $c < x < d$). Ces programmes peuvent aussi traiter le cas où le milieu d'indice ν_1 a envahi le demi espace $y > \frac{1}{2}h$; l'onde incidente est alors une onde plane se propageant dans ce milieu et k_0 doit être remplacé par $k_0\nu_1$ dans l'expression de $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$.

Il est difficile de rendre compte des résultats obtenus qui se révèlent très sensibles aux différents paramètres. Leur exploitation va être entreprise au laboratoire. En attendant, les figs. 2 et 3 donnent une idée des possibilités de la méthode, méthode que nous nous proposons d'étendre pour d'autres formes du masque: le cas d'une fente unique dans une lame infiniment conductrice est en cours d'étude.

Références

[1] S. Middelhoek, IBM J. Res. Develop. 14 (1970) 117.
[2] D. Maystre et R. Petit, Opt. Commun. 5 (1972) 90.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R. PETIT qui est à l'origine de ce travail, en a suivi constamment le déroulement et a su mettre à ma disposition les moyens matériels nécessaires pour le mener à bien.

Je remercie vivement Messieurs les Professeurs A. LICHNEROWICZ et A. MARECHAL qui, en acceptant de faire partie du jury, ont manifesté leur interêt pour mes travaux.

Ma gratitude va aussi à Monsieur le Professeur P. BOUSQUET qui, après m'avoir offert plusieurs fois l'aide du Laboratoire d'Optique II, a accepté la présidence du jury.

Monsieur G. PIEUCHARD, avec qui j'ai eu plusieurs fois l'occasion de collaborer fructueusement au cours de mes travaux, a bien voulu faire partie du jury, qu'il en soit ici remercié.

Je tiens également à remercier tous les membres du Laboratoire d'Optique Electromagnétique qui m'ont apporté une aide, et particulièrement :
Monsieur le Professeur M. CADILHAC pour ses précieux conseils dans le domaine des mathématiques,
Monsieur M. NEVIERE avec qui j'ai poursuivi dans la recherche une vieille et amicale collaboration,
Messieurs P. VINCENT et J.L. ROUMIGUIERES qui, dans certains des travaux exposés ici, m'ont apporté leur solide et amical concours,
Monsieur R.Mc PHEDRAN à qui je dois une fructueuse comparaison avec les travaux de M. C. HUTLEY, ce dernier ayant bien voulu nous communiquer ses résultats avant publication,
Messieurs J. GILEWICZ et M. DUBAN qui ont réalisé en grande partie l'exploitation des programmes dans la dernière phase du travail, en y apportant leur grande expérience.

Je tiens à remercier particulièrement Melle PICCHI dont la généreuse

.../...

spontanéité a permis d'imprimer rapidement ce mémoire. Je remercie également le personnel technique du Laboratoire d'Optique Electromagnétique et particulièrement Mme FRIZZI qui a toujours su allier la gentillesse à la compétence.

Il me faut aussi signaler que ce travail a bénéficié de la franche collaboration de la firme JOBIN YVON, et outre Monsieur G. PIEUCHARD, je tiens à remercier Messieurs FLAMAND et LAUDE, ingénieurs du département réseaux.

Je remercie également l'Institut Géographique National (Monsieur CARBONELL) la firme ZEISS OBERKOCHEN, le L.E.T.I. du C.E.N. de Grenoble, le Laboratoire de Physique Cristalline de Saint-Jérôme dirigé par Monsieur le Professeur CAPELLA.

C'est grâce à Monsieur le Professeur VISCONTI que les calculs ont pu être réalisés sur le terminal marseillais de l'U.N.I.V.A.C. 1110 d'ORSAY.

De nombreux membres du Laboratoire d'Optique II de Saint-Jérôme ont souvent reçu ma visite interessée, principalement à propos de problèmes expérimentaux, je remercie en particulier Messieurs FORNIER, PELLETIER, RICHIER, ROCHE et VIDAL,

Que tous ceux, enfin, qui m'ont apporté un concours, soient assurés de ma reconnaissance.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER
Marseille, le 11 FEVRIER 1974

Le Vice Président de l'Université

M. DUSSARDIER